Aufgabenblatt 09, Abgabe: 27.06.2011

Aufgabe 1: Eigenschaften der Deltafunktion (12 Punkte)

Die Deltafunktion $\delta(x)$ ist dadurch definiert, dass sie in Integralen, in Kombination mit einer beliebigen, genügend glatten Funktion $f(x)$, die folgende Wirkung hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-a) = f(a) \qquad (a \in \mathbb{R})\,.$$

Insbesondere gilt also $\int dx f(x)\delta(x) = f(0)$. Die Deltafunktion ist damit keine Funktion im üblichen Sinn, sondern eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ im Limes $n \to \infty$ zur Deltafunktion wird.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung von Gleichung (1) die Eigenschaften

$$(i) \quad \delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x),\ \lambda \neq 0 \qquad \text{und} \qquad (ii) \quad \delta(h(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|h'(x_i)|}$$

wobei angenommen wird, dass $h(x)$ nur einfache Nullstellen x_i hat und an diesen differenzierbar ist.

Die Verallgemeinerung der Deltafunktion auf beliebige Dimensionen $d = 1, 2, \ldots$ ist gegeben durch

$$\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot \delta(x_d - a_d) = \prod_{n=1}^{d} \delta(x_n - a_n)$$

und erfüllt $\int_{\mathbb{R}^d} d^d x\, f(\vec{x})\, \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{a}) = f(\vec{a})$.

(c) Beweisen Sie (für $\epsilon > 0$ und $\lambda \neq 0$) die weiteren Eigenschaften

$$(i) \quad \int_{\{|\vec{x}-\vec{a}| \le \epsilon\}} d^d x\, \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{a}) = 1\,, \qquad (ii) \quad \delta^{(d)}(\lambda \vec{x}) = |\lambda|^{-d} \delta^{(d)}(\vec{x})\,.$$

(d) Zeigen Sie für eine nicht-singuläre Matrix A

$$\delta(A\vec{x} + \vec{b}\,) = \frac{1}{|\det(A)|}\, \delta\big(\vec{x} + A^{-1}\vec{b}\,\big)\,.$$

Aufgabe 2: Elektrostatik (8 Punkte)

Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(r)$ für die kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(r) = -\frac{b}{r}\, e^{-\alpha r}\,.$$