Aufgabenblatt 10, Abgabe: 4.07.2011

Aufgabe 1: Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Gesamtladung, das Dipol- und Quadrupolmoment für einen dünnen, homogen geladenen Stab ($-a \leq x_1 \leq a$) und einen homogen geladenen Kubus ($-a \leq x_i \leq a, i = 1, 2, 3$). Geben Sie die Fernfeldnährung für die elektrischen Potentiale und elektrischen Felder der Ladungsverteilungen bis zur dritten Ordnung in der Multipolentwicklung an.

Aufgabe 2: Biot-Savart-Gesetz der Magnetostatik (4 Punkte)

In der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ist das Vektorpotential $\vec{A}$ einer Stromdichte $\vec{j}$ durch das Poissonintegral $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$ bestimmt. Leiten Sie daraus das Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}\,') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}\,'}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3}$$

für das magnetische Feld ab.

Aufgabe 3: Ein- und zweidimensionale Elektrodynamik (10 Punkte)

Betrachten Sie zunächst die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für ein dreidimensionales System, dass translationsinvariant in den x_2- und x_3-Richtung und invariant unter Spiegelungen an der x_1-Achse ist: $\rho = \rho(x_1, t), \vec{j} = j(x_1, t)\hat{e}_1$.

(a) Lösen Sie die Maxwell-Gleichungen mit Hilfe eines Ansatzes der Form $\vec{E}(\vec{x}, t) = E(x_1, t)\hat{e}_1$, $\vec{B}(\vec{x}, t) = 0$. Bestimmen Sie die Stromdichte $j(x_1, t)$ in Abhängigkeit der Ladungsdichte $\rho(x_1, t)$.

Betrachten Sie nun das analoge Problem eines Systems, das translationsinvariant in x_3-Richtung und invariant unter Spiegelungen an der (x_1, x_2)-Ebene ist: $\rho = \rho(\vec{x}_\parallel, t)$, $\vec{j} = j_1(\vec{x}_\parallel, t)\hat{e}_1 + j_2(\vec{x}_\parallel, t)\hat{e}_2$, wobei $\vec{x}_\parallel = (x_1, x_2)$. Wir machen nun einen Ansatz der Form $\Phi = \Phi(\vec{x}_\parallel, t)$ für das skalare Potential und $\vec{A} = A_1(\vec{x}_\parallel, t)\hat{e}_1 + A_2(\vec{x}_\parallel, t)\hat{e}_2$ für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass das elektrische Potential durch das 2-dimensionale Poissonintegral

$$\Phi(\vec{x}_\parallel, t) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int d^2x' \, \rho(\vec{x}\,'_\parallel, t) \ln(|\vec{x}_\parallel - \vec{x}\,'_\parallel|)$$

gegeben ist. *Hinweis*: Der Beweis analog zur Vorlesung verwendet den Stokeschen Satz in der Ebene (Übungsblatt 6).

(c) In welche Richtung zeigt das Magnetfeld? Ist der Ansatz für $\vec{A}$ kompatibel mit der Translationsinvarianz?