Aufgabenblatt 11, Abgabe: 11.07.2011

Aufgabe 1: Die eindimensionale Wellengleichung (6 Punkte)

Die Amplitude $\xi(x,t)$ der longitudinalen Schwingungen eines Metallstabs mit Länge L erfüllt für kleine Auslenkungen die eindimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}(x,t)$.

(a) Konstruieren Sie die allgemeine Lösung der Gleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes.

(b) Finden Sie die Lösung der Wellengleichung für den Spezialfall, dass das eine Ende des Stabs bei $x = 0$ fest eingespannt ist, während das andere Ende bei $x = L$ frei schwingen kann. D.h. die Schwingung unterliegt den Randbedingungen $\xi(x = 0, t) = 0$ und $\frac{\partial\xi}{\partial x}(x = L, t) = 0$.

Aufgabe 2: Die zweidimensionale Membran (6 Punkte)

Die Schwingungen einer ebenen Membran mit eingespanntem Rand erfüllen die zweidimensionale Wellengleichung $\Delta\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(\vec{x},t)$ mit $\Phi(\vec{x},t) = 0$ auf dem Rand. Zeigen Sie: Die Eigenmoden der Schwingung einer kreisförmigen Membran mit Radius r_0 sind in ebenen Polarkoordinaten (r,φ) gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi,t) = a\, J_m(pr)\, \sin(m\varphi+\beta)\, \sin(cpt+\alpha)$$

mit $m = 0,1,2,\ldots$. Dabei sind die Bessel-Funktionen $J_m(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung $J_m'' + \frac{1}{z}J_m' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0$. Der Wert p wird durch die Randbedingung $J_m(pr_0) = 0$ festgelegt.

Aufgabe 3: Die eindimensionale Diffusionsgleichung (8 Punkte)

Die Diffusionsgleichung in einer Raumrichtung lautet $\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t)$, wobei D die Diffusionskonstante des Prozesses ist.

(a) Zeigen Sie, dass für $t > 0$

$$n_0(x,t) = (4\pi Dt)^{-1/2}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

eine spezielle Lösung der Diffusionsgleichung ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass $n_0(x,t)$ für $t \to 0$ eine Darstellung der Diracschen Delta-Funktion liefert:

$$\lim_{t\to 0} n_0(x,t) = \delta(x - x_0)\,.$$

(c) Konstruieren Sie aus den Ergebnissen (a) und (b) eine Integraldarstellung der Lösung der Diffusionsgleichung für eine zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegebene Teilchendichte $\rho(x_0) = n(x_0, t = 0)$. Prüfen Sie deren Gültigkeit explizit.