

# „Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 2 – Abgabe: 30.04.2012

## 1. (12 P.) Anwendungen der Kettenregel

- (a) Betrachten Sie eine Funktion der Form  $\bar{g}(t) = g(f_1(t), f_2(t))$  mit  $f_{1,2} \in \mathbb{R}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie  $\frac{d\bar{g}}{dt}(t)$  allgemein nach der Kettenregel.
- (b) Betrachten Sie eine Funktion der Form  $\bar{g}(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  mit  $f_{1,2} \in \mathbb{R}$  und  $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:  $\partial_{x_1}\bar{g} = (\partial_{f_1}g)\partial_{x_1}f_1 + (\partial_{f_2}g)\partial_{x_1}f_2$  und berechnen Sie analog  $\partial_{x_2}\bar{g}$ .
- (c) Betrachten Sie eine Funktion  $F(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und der Eigenschaft  $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\alpha F(\mathbf{x})$  oder explizit:

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fest, } \forall \lambda > 0).$$

Zeigen Sie durch geeignetes Ableiten:  $x_1\partial_{x_1}F + x_2\partial_{x_2}F + \dots + x_n\partial_{x_n}F = \alpha F$ . Überprüfen Sie diese Beziehung konkret am Beispiel  $F(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1(x_2)^3 - 5(x_2)^4$ .

- (d) Betrachten Sie die Funktion  $\bar{v}(\rho, \varphi) \equiv v(x_1(\rho, \varphi), x_2(\rho, \varphi))$  mit  $x_1(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi)$  und  $x_2(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi)$ . Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2.$$

## 2. (8 P.) Berechnung partieller Ableitungen

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion  $v(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  für alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  die Gleichung  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0$  erfüllt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $v(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $t \in \mathbb{R}$  und beliebigen (glatten) Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  die Gleichung  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$  erfüllt.