

# „Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 3 – Abgabe: 07.05.2012

## 1. (10 P.) Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante

In der Vorlesung wurden für allgemeine Funktionen  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{a}), \dots, f_n(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  die Funktionalmatrix  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$  und die Funktional- oder Jacobi-Determinante  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}\right)$  eingeführt.

- Betrachten Sie die Funktion  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \equiv (a_1^2 \cos(a_2), a_1 \sin(a_2))$  und berechnen Sie  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$  und  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ . Bestimmen Sie die Bilder der Geraden  $a_1 = a_{10}$  und  $a_2 = a_{20}$ , wobei  $a_{10}$  und  $a_{20}$  vorgegebene reelle Konstanten sind, unter  $\mathbf{f}$ .
- Betrachten Sie die Funktion  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \equiv (a_1 a_2 \cos(a_3), a_1 a_2 \sin(a_3), \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2))$  und berechnen Sie  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$  und  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ . Bestimmen Sie die Bilder der Ebenen  $a_1 = a_{10}$ ,  $a_2 = a_{20}$  und  $a_3 = a_{30}$ , wobei  $a_{i0}$  mit  $i = 1, 2, 3$  eine reelle Konstante ist, unter  $\mathbf{f}$ .

## 2. (10 P.) Das Druckfeld auf einer Landkarte

Betrachten Sie die Funktion  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x_1, x_2) \equiv p_0 - \frac{p_1 R^2}{x_1^2 + 3x_2^2 + R^2}$ , die den atmosphärischen Druck mit einer Depression am Ursprung beschreibt. Die Parameter  $p_0$ ,  $p_1$  und  $R$  sind positive Konstanten mit  $p_0 > p_1$ .

- Rechnen Sie den Gradienten  $\nabla p(\mathbf{x})$  von  $p(\mathbf{x})$ .
- Rechnen Sie die Hess'sche Matrix  $\frac{\partial^2 p(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ .
- Geben Sie die Taylor Entwicklung von  $p(\mathbf{x})$  am Ursprung bis zum quadratischen Term an.
- Beschreiben Sie die isobaren Kurven, d.h. die Kurven, entlang denen der Druck  $p = \bar{p}$  konstant bleibt.
- Parametrisieren Sie die isobaren Kurven als eine Funktion  $\mathbf{f}_{\bar{p}}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , und rechnen Sie den Tangentialvektor  $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$ . Verifizieren Sie, dass  $\nabla p(\mathbf{f}_{\bar{p}}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt}(t) = 0 \quad \forall t$ .