

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 4 – Abgabe: 12.05.2012

1. (8 P.) Eigenschaften der Jacobi-Determinante

Die Jacobi-Determinante der Ableitungen zweier Funktionen $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ ist bekanntlich durch

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \equiv \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x_2} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_{x_2} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_{x_1} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_{x_2}$$

definiert, wobei $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_{x_2}$ die partielle x_1 -Ableitung von f_i (mit $i = 1, 2$) bei konstantem x_2 bezeichnet, etc. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

$$\frac{\partial(f_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x_2}, \quad \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = -\frac{\partial(f_2, f_1)}{\partial(x_1, x_2)}$$

sowie die Kettenregel für Funktionen $f_1(u_1, u_2)$, $f_2(u_1, u_2)$, $u_1(x_1, x_2)$ und $u_2(x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

2. (12 P.) Gradient, Divergenz, Rotation

(a) Wir definieren wie üblich $r = r(\mathbf{x}) \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Berechnen Sie mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant:

$$(i) \quad \nabla \cdot (r^2 \mathbf{a}) \quad (ii) \quad \nabla \times (e^{i\alpha x_1} \mathbf{a}) \quad (iii) \quad \nabla \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \right) \quad (iv) \quad \nabla \cdot (\mathbf{a} e^{i\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}})$$

(b) Berechnen Sie mit $\alpha(\mathbf{x}) \equiv x_1 x_2^2 x_3^3$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} 2x_2^2 x_3 \\ x_1 x_2 \\ -x_3^2 \end{pmatrix}$:

$$(i) \quad \nabla \alpha \quad (ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (iii) \quad \nabla \times \mathbf{A} \quad (iv) \quad \nabla \cdot (\alpha \mathbf{A}) \quad (v) \quad \nabla \times (\alpha \mathbf{A})$$

(c) Berechnen Sie mit $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 2x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2$ und $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ (Laplace-Operator):

$$(i) \quad \nabla \alpha \quad (ii) \quad \Delta \alpha$$