„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 5 – Abgabe: 21.05.2012

1. (4 P.) **Doppelte Rotationen**

   Als „doppelte Rotation“ eines Vektorfelds $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ bezeichnen wir $[\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a})]\,(\boldsymbol{x})$. Zeigen Sie durch Berechnung der doppelten Rotation

   (a) eines Vektorfelds $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$, das für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}$ erfüllt, dass $\Delta \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{j}$ gilt.

   (b) eines Vektorfelds $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, das für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ erfüllt, dass $\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\rho$ gilt.

   Hierbei sind $\rho(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ differenzierbar und ansonsten beliebig.

2. (10 P.) **Bogenlänge und skalare Kurvenintegrale**

   Die Bogenlänge s ist bekanntlich gemäß der Beziehung $ds = [(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]^{1/2}$ mit infinitesimalen Änderungen $d\boldsymbol{x}$ des Ortsvektors verknüpft.

   (a) (6 P.) Betrachten Sie eine beliebige (glatte) Bahnbewegung $\boldsymbol{x}(t)$ eines Massenpunktes. Zeigen Sie zuerst allgemein:

   $$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad , \quad |\dot{\boldsymbol{x}}| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \quad , \quad \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}_\perp + \boldsymbol{a}_\parallel$$

   mit der *Normal*beschleunigung $\boldsymbol{a}_\perp \equiv \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ und der *Tangential*beschleunigung $\boldsymbol{a}_\parallel \equiv \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2}$. Beweisen Sie, dass $\boldsymbol{a}_\perp$ und $\boldsymbol{a}_\parallel$ in der Tat senkrecht sind.

   (b) (2 P.) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\left\{\boldsymbol{x} \middle|\ x_2 = x_3 = \frac{1}{2}x_1^2\,,\ 0 \le x_1 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

   (c) (2 P.) Berechnen Sie allgemein die Bogenlänge der Kurve $\boldsymbol{x}(\varphi) = \rho(\varphi)\,(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le 2\pi$ und differenzierbarem $\rho(\varphi) \ge 0$.

3. (6 P.) **Vektorielle Kurvenintegrale**

   Betrachten Sie die an einem Massenpunkt, der unter der Einwirkung der Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ die Bahn $\boldsymbol{x}(t)$ durchläuft, verrichtete Arbeit für die Fälle (mit $0 \le t \le 2\pi$):

   $$\text{(i) } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{(ii) } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}x_1\,x_2\\ 1\\ x_2\,x_3\end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{pmatrix}$$

   $$\text{(iii) } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}3x_1 - 4x_2 + 2x_3\\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3^2\\ 2x_1x_3 - 4x_2^2 + x_3^2\end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix}4\cos(t)\\ 0\\ 3\sin(t)\end{pmatrix}.$$