

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 6 – Abgabe: 29.05.2012

1. (9 P.) Der Laplace Operator

(a) (1 P.) Beweisen Sie folgende Identität: $\Delta(\lambda\mu) = \lambda\Delta\mu + \mu\Delta\lambda + 2\nabla\lambda \cdot \nabla\mu$.

(b) (3 P.) Sei $f(\mathbf{x}) = r^\nu$, $r(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass $\Delta f(\mathbf{x}) = \nu(\nu + 1)r^{\nu-2}$, $r \neq 0$.

Folgern Sie, dass $\Delta \frac{1}{r(\mathbf{x})} = 0$, $r \neq 0$.

(c) (3 P.) Betrachten Sie nun $f(\mathbf{x}) = \rho^\nu$, $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Zeigen Sie, dass $\Delta \rho^\nu = \nu^2 \rho^{\nu-2}$.

(d) (2 P.) Zeigen Sie, dass $\Delta \log \rho(\mathbf{x}) = 0$, $\rho \neq 0$.

Hinweis: $\log u = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{u^\nu - 1}{\nu}$.

2. (6 P.) Die Fläche eines Kegels

Betrachten Sie einen geraden Kreiskegel der Höhe h mit einem Basiskreis des Radius R .

(a) Berechnen Sie die Seitenfläche des Kegels mit Hilfe der in der Vorlesung behandelten Methode für Flächen der Form $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, z(u_1, u_2))$.

(b) Betrachten Sie den Kegel als Rotationskörper und berechnen Sie seine Mantelfläche mit Hilfe der ersten Guldin'schen Regel.

3. (5 P.) Fläche eines Torus

Betrachten Sie den Torus, der sich durch Drehung des Kreises

$$\{\mathbf{x} \mid (x_1 - a)^2 + (x_3)^2 = R^2, x_2 = 0\}$$

um die $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse ergibt (mit $a > R > 0$). Parametrisieren Sie den Torus durch

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho(u_2) \cos(u_1) \\ \rho(u_2) \sin(u_1) \\ R \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \rho(u_2) = a + R \cos(u_2), \quad \mathbf{u} \in [0, 2\pi]^2 \equiv \mathcal{R}.$$

(a) Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung $|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|$ mit $\mathbf{t}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ ($i = 1, 2$).

(b) Berechnen Sie aus (a) die Fläche $|\mathcal{F}| = \int_{\mathcal{R}} d\mathbf{u} |\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|$ des Torus.