

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 7 – Abgabe: 04.06.2012

1. (12 P.) Satz von Stokes

Der Stokes'sche Satz lautet in der üblichen Notation:

$$\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Betrachten Sie als Spezialfall für die orientierte Fläche \mathcal{F} ein Segment eines (elliptischen) Paraboloids mit dem kreisförmigen Rand $\partial\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \mid x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq 2\} \quad , \quad \partial\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 2\} .$$

Der Normalvektor auf \mathcal{F} hat eine positive 3-Komponente: $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 > 0$. Das Vektorfeld \mathbf{g} hat die Form $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_2, 2x_3, x_1^2)$.

- Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (u_1 \cos(u_2), u_1 \sin(u_2), \frac{1}{2}u_1^2)$ mit $\mathbf{u} \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung der orientierten Fläche \mathcal{F} darstellt.
- Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ ($i = 1, 2$), und zeigen Sie für den Normalvektor: $\hat{\mathbf{n}} = (1 + u_1^2)^{-1/2}(-u_1 \cos(u_2), -u_1 \sin(u_2), 1)$.
- Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit.
- Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes für diesen Spezialfall.

2. (8 P.) Satz von Stokes in der Ebene

Wir betrachten eine orientierte Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ in der $\hat{\mathbf{e}}_1$ - $\hat{\mathbf{e}}_2$ -Ebene mit der (mittels der Bogenlänge s parametrisierten) geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{F} = \{(x_1(s), x_2(s), 0)\}$ als orientiertem Rand. Neben dem Tangentialvektor $\mathbf{x}'(s) \equiv (\frac{dx_1}{ds}(s), \frac{dx_2}{ds}(s), 0)$ an der Kurve definieren wir den Vektor $\mathbf{n} \equiv (x_2', -x_1', 0)$.

- Zeigen Sie: $|\mathbf{x}'(s)| = 1$, $|\mathbf{n}(s)| = 1$, $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n} = 0$ und $\det(\mathbf{n}, \mathbf{x}', \hat{\mathbf{e}}_3) = 1$.
- Zeigen Sie für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ mit Hilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\int_{\partial\mathcal{F}} ds (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = \int_{\mathcal{F}} dx_1 dx_2 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) .$$

Hinweis: benutzen Sie die Tatsache, dass $\mathbf{n} = \mathbf{x}' \times \mathbf{e}_3$.

Falls Sie eine Analogie zum Gauß'schen Satz sehen: Erklären Sie diese!