

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 8 – Abgabe: 11.06.2012

1. (6 P.) Eine Identität für den Levi-Civita-Tensor

Zeigen Sie für alle $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$ die Identität:

$$\varepsilon_{ikl}\delta_{jm} + \varepsilon_{ilj}\delta_{km} + \varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \varepsilon_{jkl}\delta_{im}.$$

Hinweis: Betrachten Sie Fallunterscheidungen, z. B. $i = m$ vs. $i \neq m$, usw.

2. (14 P.) Der Gauß'sche Satz

Der Gauß'sche Satz lautet bekanntlich:

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{f}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} \quad , \quad (1)$$

wobei \mathcal{V} ein orientiertes Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Als erste Anwendung betrachten wir eine Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3)$ und ein Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid 0 \leq x_3 \leq 3, x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

- Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit.
- Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Als zweite Anwendung betrachten wir eine Funktion

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (2x_1x_2 + x_3, x_2^2, -x_1 - 3x_2)$ und ein Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{x} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 2(x_1 + x_2) + x_3 \leq 6\}$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

- Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit.
- Bestimmen Sie eine Parametrisierung des orientierten Dreiecks $\{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V} \mid 2(x_1 + x_2) + x_3 = 6\}$ und berechnen Sie die entsprechenden Tangentialvektoren sowie den Normalvektor mit Hilfe dieser Parametrisierung.
- Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.