„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 9 – Abgabe: 18.06.2012

1. (14 P.) **Der Gauß'sche Satz (II)**

   Der Gauß'sche Satz lautet bekanntlich:

$$\int_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{f} \quad , \tag{1}$$

   wobei $\mathcal{V}$ ein orientiertes Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Als erste Anwendung betrachten wir eine Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x_3^2 - x_1, -x_1x_2, 3x_3)$ und ein Integrationsvolumen $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{x} \mid 0 \le x_1 \le 3\ , \quad |x_3| \le 4 - x_2^2\}$ mit nach innen gerichtetem Normalvektor.

   (a) (4 P.) Berechnen Sie entweder das rechte oder das linke Glied von Gleichung (1), je nachdem was bequemer für Sie ist.

   Als zweite Anwendung betrachten wir eine Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (2x_1 + 3x_3, -x_1x_3 - x_2, x_2^2 + 2x_3)$ und ein Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \le 3\} \quad , \quad \boldsymbol{x}_0 \equiv (3, -1, 2).$$

   mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

   (b) (4 P.) Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit.

   (c) (6 P.) Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (b) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

2. (6 P.) **Der erste Green'sche Satz**

   Der erste Satz von Green lautet bekanntlich

$$\int_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{x}\ \left[(\boldsymbol{\nabla}\mu)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\nu) + \mu\Delta\nu\right] = \int_{\partial\mathcal{V}} dS\ \mu\frac{\partial\nu}{\partial n}\ . \tag{2}$$

   Dieser Satz findet seine Anwendung z. B. beim Nachweis der Eindeutigkeit von Lösungen elektrostatischer Probleme. Betrachten Sie z. B. die Gleichung $(\Delta\Phi)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})$ für das elektrostatische Potential $\Phi(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, wobei sowohl die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x})$ in $\mathcal{V}$ als auch der Potentialwert $V(\boldsymbol{x})$ auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$ vorgegeben sind: $\Phi(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{V}$. Um nachzuweisen, dass $\Phi(\boldsymbol{x})$ durch diese Informationen eindeutig festgelegt ist, nimmt man zunächst an, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen $\Phi_1 \neq \Phi_2$:

   (a) Betrachten Sie die Differenzfunktion $w \equiv \Phi_1 - \Phi_2$. Zeigen Sie, dass w für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ die Gleichung $(\Delta w)(\boldsymbol{x}) = 0$ und für alle $\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{V}$ die Gleichung $w(\boldsymbol{x}) = 0$ erfüllt.

   (b) Leiten Sie aus (a) und Gleichung (2) mit der Wahl $\mu = \nu = w$ ab: $\int_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{x}\ \left[(\boldsymbol{\nabla}w)(\boldsymbol{x})\right]^2 = 0$. Was schließen Sie hieraus?