

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 10 – Abgabe: 25.06.2012

1. (12 P.) Die Deltafunktion

Die Deltafunktion $\delta(x)$ ist dadurch definiert, dass sie in Integralen, in Kombination mit einer beliebigen, jedoch genügend glatten Funktion $f(x)$, die folgende Wirkung hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere gilt also $\int dx f(x) \delta(x) = f(0)$. Die „Deltafunktion“ ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*. Sie kann im Limes $n \rightarrow \infty$ aus der Funktionenfolge $\Delta_n(x)$ erhalten werden, wobei $\Delta_n(x) \equiv n$ für $|x| \leq \frac{1}{2n}$ und $\Delta_n(x) \equiv 0$ für $|x| > \frac{1}{2n}$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass man die Deltafunktion allgemein im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\epsilon} f(x/\epsilon)$, wobei $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1$. Beispiele dafür sind $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.
- (b) Beweisen Sie die Eigenschaften: (i) $\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x)$ und (ii) $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, wobei angenommen wird, dass $f(x)$ nur einfache Nullstellen x_i hat und an diesen jeweils differenzierbar ist.

Die Verallgemeinerung der Deltafunktion auf beliebige d Dimensionen ist:

$$\delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \delta(x_1 - a_1) \dots \delta(x_d - a_d) = \prod_{\ell=1}^d \delta(x_\ell - a_\ell)$$

und hat die Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$.

- (c) Beweisen Sie die Eigenschaft $\delta^{(d)}(\lambda \mathbf{x}) = |\lambda|^{-d} \delta^{(d)}(\mathbf{x})$.
- (d) Geben Sie die dreidimensionale Deltafunktion in Kugel- und Polarkoordinaten an.

2. (8 P.) Greensche Funktion des Laplace-Operators

Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der δ -Funktion und des Gaußschen Integralsatzes, daß $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ die Gleichung $-\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ erfüllt. Hinweis: verwende den Gaußschen Integralsatz für das Vektorfeld $\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi$, welches die Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ erfüllt, sowie die Kugelsymmetrie der Aufgabe.