

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 11 – Abgabe: 02.07.2012

1. (12 P.) Eigenschaft der harmonischen Funktionen

Sei f eine *harmonische Funktion* in einem Gebiet D von \mathbb{R}^3 . Dies bedeutet, dass $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ zweimal stetig differenzierbar ist und $\Delta f = 0$. Hier soll die Eigenschaft bewiesen werden, dass

$$f(\mathbf{a}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(\mathbf{a}; R)} f \, dS, \quad (1)$$

wenn $\overline{B}(\mathbf{a}, R) \subset D$. Hier ist $S(\mathbf{a}; R)$ die am Punkt \mathbf{a} zentrierte Kugel von Radius R und $\overline{B}(\mathbf{a}, R)$ der entsprechende Ball. Diese Eigenschaft besagt, dass der Mittelwert einer harmonischen Funktion auf einer Kugel (gegeben durch ein skalares Flächenintegral) gleich ihrem Wert am Zentrum der Kugel ist.

- (a) (3 P.) Es genügt, die Eigenschaft für \mathbf{a} am Ursprung zu beweisen. Benutzen Sie den zweiten Greenschen Satz $\int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = \int_{\Omega} d^3\mathbf{x} (f\Delta g - g\Delta f)$ mit $g(x) = -\frac{1}{|x|}$ und $\Omega = \{x \mid \epsilon < |x| < R\}$, um zu zeigen, dass

$$\int_S f\nabla g \cdot d\mathbf{S} = \int_S g\nabla f \cdot d\mathbf{S}, \quad S = S(\mathbf{0}; R) \cup S(\mathbf{0}; \epsilon). \quad (2)$$

- (b) (2 P.) Zeigen Sie, ausgehend vom ersten Greenschen Satz $\int_{\partial\Omega} h\nabla f \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} d^3\mathbf{x} (h\Delta f + \nabla h \cdot \nabla f)$, dass für eine harmonische Funktion f die Eigenschaft $\int_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \nabla f = 0$ gilt (Hinweis: setzen Sie $h = 1$). Folgern Sie, dass das rechte Glied der Gl. (2) verschwindet.
- (c) (4 P.) Schließen Sie aus den ersten zwei Teilaufgaben, dass

$$\frac{1}{R^2} \int_{S(\mathbf{0}; R)} f \, dS = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S(\mathbf{0}; \epsilon)} f \, dS. \quad (3)$$

- (d) (3 P.) Nehmen Sie nun den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ des letzten Ausdrucks, um den Beweis abzuschließen.

2. (8 P.) Elektrostatisches Feld eines Dipols

Zwei Ladungen, $+q$ und $-q$, befinden sich an den Punkten mit kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_+ = (0, 0, a)$ und $\mathbf{x}_- = (0, 0, -a)$. Man nennt $\mathbf{d} = 2aq\mathbf{e}_3$ das *elektrische Dipolmoment*.

- (a) (2 P.) Indem Sie das Coulomb Gesetz und das Superpositionsprinzip verwenden, bestimmen Sie das von den zwei Ladungen erzeugte elektrische Feld \mathbf{E} in der xy Ebene in einer Distanz r vom Ursprung. Wir nehmen an, dass $r \gg 2a$.
- (b) (3 P.) Betrachten Sie nun einen allgemeinen Punkt P und berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{x})$ am Punkt \mathbf{x} , der durch die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) parametrisiert wird. Geben Sie eine Annäherung für $r \gg 2a$ an, indem Sie $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_+| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_-| \simeq 2a \cos \theta$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_+| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}_-| \simeq r^2$ verwenden. Berechnen Sie das entsprechende elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.
- (c) (3 P.) Mit welcher Potenz von r fällt $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ bei großen Abständen ab? Skizzieren Sie das elektrische Feld sowie ein paar equipotenzialen Ebenen ($\Phi(\mathbf{x}) = \text{konstant}$).