„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 12 – Abgabe: 09.07.2012

1. (10 P.) **Elektrostatisches Feld einer homogen geladenen Kugel**

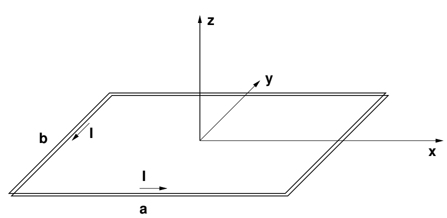
   Wir betrachten eine homogen geladene Kugel von Radius R mit ihrem Zentrum am Ursprung. Sie trägt insgesamt eine Ladung Q.

   (a) (2 P.) Bestimmen Sie mittels des Gaußschen Gesetzes $\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{Q_\Omega}{\epsilon_0}$ das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x}$.

   (b) (3 P.) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x})$ anhand der Dirac Delta-Funktion an.

   (c) (3 P.) Benutzen Sie die Lösung $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \, \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ für das elektrostatische Potenzial, um dann das elektrische Feld $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ zu bestimmen. Prüfen Sie, dass Sie das selbe Ergebnis wie unter (a) bekommen.

2. (10 P.) **Magnetisches Dipolfeld**



   Wir wollen das von der links abgebildeten Schleife erzeugte magnetische Feld mittels der formellen Lösung der Magnetostatik

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \, \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{1}$$

   in großen Entfernungen $R \gg a, b$ bestimmen. Der Strom I, der durch die Schleife fließt, ist zeitunabhängig.

   (a) (2 P.) Geben Sie die drei Komponenten j_x, j_y, j_z der Stromdichte an. Verwenden Sie dafür die Delta Funktion und die Heaviside Funktion $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

   (b) (3 P.) Berechnen nun das Integral (1) für die A_x Komponente indem Sie den Integranden in b/R Taylor entwickeln. Zeigen Sie, dass $A_x(\boldsymbol{R}) = -\frac{\mu_0 I a b}{4\pi} \frac{Y}{R^3}$, $\boldsymbol{R} = (X, Y, Z)$.

   (c) (3 P.) Benutzen Sie die Identitäten

$$\theta(x + a/2)\theta(x - a/2) \overset{a \to 0}{\to} a\delta(x)$$
$$\delta(y + \tfrac{b}{2}) - \delta(y - \tfrac{b}{2}) \overset{b \to 0}{\to} b\,\partial_y \delta(y)$$

   im Ausdruck der Stromverteilung, um A_x erneut zu berechnen.

   (d) (3 P.) Zeigen durch ein Symmetrie-Argument, dass $A_y(\boldsymbol{R}) = +\frac{\mu_0 I a b}{4\pi} \frac{X}{R^3}$. Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial durch den folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{R}}{R^3}, \tag{2}$$

   wobei das *magnetische Moment* in diesem Beispiel durch

$$\boldsymbol{\mu} = I S \cdot \boldsymbol{n} \tag{3}$$

   gegeben ist; $S = ab$ ist die von der Schleife begrenztzen Fläche und $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$ der Einheitsvektor, der orthogonal zur Ebene ist, in der die Schleife sich befindet (orientiert nach der Korkenzieher-Regel). Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}(3(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_R - \boldsymbol{\mu})$.