„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 13 – Abgabe: 16.07.2012

1. (15 P.) **Magnetfeld des Solenoids**

   (a) (3 P.) **Über den Raumwinkel:** Sei $\overline{S}$ eine berandete Fläche. Es wird angenommen, dass gerade Linien aus dem Punkt $\boldsymbol{x}$ die Fläche $\overline{S}$ höchstens einmal durchschneiden. Sei $S(\boldsymbol{x}; a)$ die am Punkt $\boldsymbol{x}$ zentrierte Kugel von Radius $a > 0$. Man definiert die bijektive Funktion $\boldsymbol{\xi}_a : \overline{S} \to S(\boldsymbol{x}; a)$ durch $\boldsymbol{\xi}_a(y) = \frac{a(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}$, und sei σ_a die Fläche von $\boldsymbol{\xi}_a(\overline{S})$. Der Raumwinkel $\Omega(\boldsymbol{x})$, unter dem $\overline{S}$ vom Punkt $\boldsymbol{x}$ aus gesehen erscheint, ist definiert als

   $$\Omega(\boldsymbol{x}; \overline{S}) = \frac{\sigma_a}{a^2}. \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass der Raumwinkel durch folgendes vektorielles Flächenintegral gegeben ist,

   $$\Omega(\boldsymbol{x}; \overline{S}) = \int_{\overline{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^3}.$$

   (b) (3 P.) Berechnen Sie den Raumwinkel, unter dem der Diskus $\overline{S} = \{\boldsymbol{y} | y_1^2 + y_2^2 \leq a^2, y_3 = d\}$ vom Ursprung gesehen wird. Für $d \gg a$ und $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, 0)$ geben Sie $\Omega(\boldsymbol{x}; \overline{S})$ in führender Ordnung an.

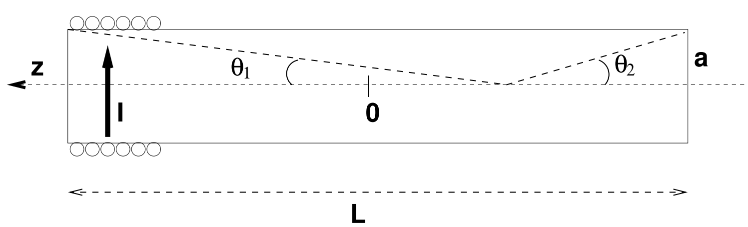
   (c) (3 P.) Zeigen Sie mittels des Stokes'schen Satzen, dass

   $$\int_{\partial S} (d\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{f})_i = \int_S d\boldsymbol{S} \cdot \partial_i \boldsymbol{f} - \int_S dS_i \, (\nabla \cdot \boldsymbol{f}), \qquad i = 1, 2, 3.$$

   (d) (3 P.) Zeigen Sie mit dem Biot-Savart Gesetz und der vorangehenden Teilaufgabe, dass das von einer vom Strom I durchflossenen Stromschleife Γ erzeugte Magnetfeld durch

   $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega(\boldsymbol{x}; \overline{S})$$

   gegeben ist, wobei $\overline{S}$ eine beliebige Fläche mit Rand Γ ist, die gerade Linien aus dem Punkt $\boldsymbol{x}$ höchstens einmal durchschneiden und $\boldsymbol{x} \notin \overline{S}$.

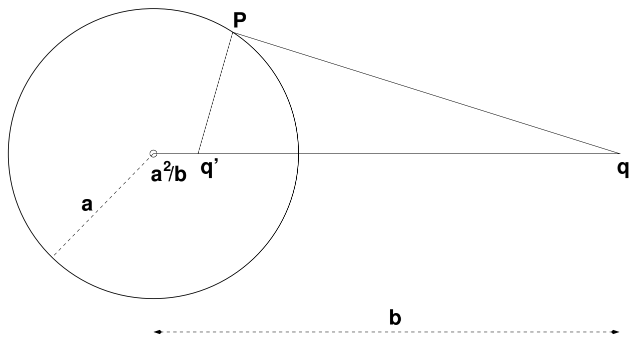


   (e) (3 P.) Ein Solenoid – eine Spule mit zylindrischer Symmetrie – ist durch einen langen Zylinder von Radius a gegeben, um den ein Strom I in n Windungen pro Längeneinheit fließt (siehe Abbildung). Verwenden Sie das Ergebnis der vorangehenden Teilaufgabe, um zu zeigen, dass die z Komponente des Magnetfeldes auf der Achse näherungsweise gleich

   $$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \tag{2}$$

   ist. Insbesondere, $\boldsymbol{B} = \mu_0 n I \boldsymbol{e}_z$ im Limes $L \to \infty$.

2. (5 P.) **Punktladung in der Nähe einer metallischen Kugel**



Die durch eine Punktladung q am Punkt $\boldsymbol{x}_1 = (b, 0, 0)$ induzierte Ladungsverteilung auf einer metallischen Kugel von Radius a soll durch die Methode der Spiegelladung bestimmt werden.

(a) (3 P.) Die Kugel ist zunächst geerdet (d.h., das Potential ϕ verschwindet auf der Kugel). Zeigen Sie, dass eine wohl gewählte Spiegelladung q' am Punkt $\boldsymbol{x}_2 = (a^2/b, 0, 0)$ dazu führt, dass die Kugel eine Äquipotentialfläche ist und geben Sie den Wert von q' an.

(b) (1 P.) Wir betrachten nun den Fall, dass die Kugel elektrisch isoliert ist und ihre Gesamtladung null ist. Zeigen Sie, dass eine zusätzliche, wohl gewählte Spiegelladung q'' am Ursprung das Randwertproblem löst.

(c) (1 P.) Berechnen Sie die Kraft, die die isolierte Kugel auf die Punktladung q ausübt.

Klausur Vorbereitung:

Es wird empfohlen, folgende Übungen besonders gut zu beherrschen:
B4[1,2]; B5[1,2,3]; B6[1,2]; B7[1]; B8[2]; B9[1,2]; B10[1bc;2]; B11[2]; B12[1,2]; B13[2].

Einige Anhaltspunkte aus den Vorlesungen:

Kettenregel; rot,grad,div,laplace ausrechnen; Kurven, Flächen parametrisieren; Kurvenintegrale & Flächenintegrale ausrechnen (skalar+vektor); Stokes'schen & Gaußschen Sätze: explizite Rechnungen beider Seiten und kurze Beweise anhand dieser Sätze.

Elektrodynamik:

Maxwell Gleichungen: von Lokal- zu Integralform; Elektrostatik & Magnetostatik: Gaußsches Gesetz und Amperesches Gesetz in Beispielen anwenden können. Elektrisches und magnetisches Dipol. Delta Funktion: Fähigkeit, damit zu rechnen & Ladungs/stromdichte damit zu parametrisieren. Konzept der Greenschen Funktion. Einfache Randwertprobleme lösen. Konzept der Eigenmoden der Wellengleichung im begrentzten Raum. Mit der Lösung der Maxwell Gleichungen für zeitlich harmonische Quellen vertraut sein.