Aufgabenblatt 01, Abgabe: 02. 05. 2011

Aufgabe 1. Integrationen (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie (mit expliziter Herleitung) die Stammfunktionen von:

$$1.\quad x^n \ln(x) \qquad 2.\quad \frac{1}{x\ln(x)} \qquad 3.\quad \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} \qquad 4.\quad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad 5.\quad \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$$

(b) Bestimmen Sie die von der Ellipse $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ eingeschlossene Fläche.

Aufgabe 2. Welche Scheibe ist am leckersten? (3 Punkte)

Ein kugelförmiges Brötchen wird in 7 gleich dicke Scheiben geteilt. Ein Krustenliebhaber wünscht sich die Scheibe mit der (absolut) meisten Kruste. Soll er eines der beiden Enden nehmen oder doch lieber die mittlere Scheibe, oder ist dies egal?

Aufgabe 3. Zeitlich veränderliche Massen (10 Punkte)

Eine kleine Rakete hebt [mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$] von der Erdoberfläche ab, indem sie kontinuierlich Gas mit der Rate (Masse pro Zeiteinheit) μ und der Relativgeschwindigkeit v_r nach unten ausstößt. Die Masse $m(t)$ der Rakete ist daher explizit zeitabhängig: $\dot{m}(t) = -\mu$. Wir vernachlässigen die Luftreibung und nehmen an, dass die maximale Höhe, die die Rakete erreicht, so niedrig ist, dass die Erdbeschleunigung als konstant (d. h. gleich $-g$) angesehen werden kann.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes $\frac{dp}{dt} = F$ [mit $F = -m(0)g$] für den *Gesamt*impuls $p(t)$ von Rakete und Treibstoff zusammen, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete die Gleichung $\dot{v} = \frac{\mu v_\mathrm{r}}{m(0) - \mu t} - g$ erfüllt. Was ist die Bedingung dafür, dass die Rakete überhaupt zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Erdoberfläche abhebt?

(b) Berechnen Sie $v(t)$ und $h(t) \equiv \int_0^t dt'\; v(t')$ explizit und skizzieren Sie diese Größen für $0 \le t \le T$ mit $T \equiv m(0)/\mu$. Nehmen Sie hierbei an, dass $\dot{v}(0) > 0$ gilt. Wie verhalten sich die Höhe $h(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ nahe $t = T$?

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 01, Abgabe: 02.05.2011

Aufgabe 1: Dreidimensionale Integrale (4 Bonuspunkte)

Berechnen Sie das Volumen von

(i) $\left\{\mathbf{x}|\, 0 \leq x_3 \leq \sqrt{16-\rho^2}\,,\ 0 \leq \rho \leq 4\cos(\varphi)\right\}$ (Zylinderkoordinaten)

(ii) $\left\{\mathbf{x}|\, r \leq 3^{2/3}\,,\ 1 \leq \tan(\theta) \leq 2\,,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ (Kugelkoordinaten)

und beschreiben sie die Form der Integrationsbereiche in Worten oder machen Sie eine Skizze.

Aufgabe 2: Differentialgleichungen erster Ordnung (10 Bonuspunkte)

Die folgenden Differentialgleichungen weisen alle die allgemeine Struktur $\frac{du}{dt} = -a(t)u + b(t)$ auf oder können durch eine geeignete Substitution auf diese Struktur zurückgeführt werden. Lösen Sie die Differentialgleichungen mittels der Methode der Variation der Konstanten

1. $u' + t^2 u = t^2$
2. $u' + u\tan(t) = \sin(t)$
3. $u' + u = \frac{2}{3}\mathrm{e}^t u^4$
4. $\mathrm{e}^{-3u}(u'-1) = t$
5. $t^2 u' - u = 1$
6. $tu'' - u' = 2t^3$.

Aufgabe 3: Funktionen mehrerer Veränderlicher (6 Bonuspunkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion zweier Variablen $f(x_1, x_2) = x_1(x_2)^2/((x_1)^2 + (x_2)^4)$ und berechnen Sie

$$\text{(i)} \lim_{x_1\to 0} f(x_1, 0) \qquad \text{(ii)} \lim_{x_2\to 0} f(0, x_2) \qquad \text{(iii)} \lim_{y\to 0} f(\lambda y^2, y)$$

mit $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, ob $\lim_{\mathbf{x}\to 0} f(\mathbf{x})$ existiert.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen im Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\text{(i)} \sin\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right) \qquad \text{(ii)} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \qquad \text{(iii)} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_{x_i} f$ und $\Delta f = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}\partial_{x_i} f$ im Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ für die folgenden Funktionen $f(\mathbf{x})$:

$$\text{(i)} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2} \qquad \text{(ii)} \arctan\left(\frac{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}{x_3}\right) \qquad \text{(iii)} \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}\,.$$