



Aufgabe 5. Schwerkraft (5 Punkte)

Schätzen Sie ab, inwiefern das Gewicht eines Menschen von 60 kg, der sich auf der Erdoberfläche befindet, typischerweise variiert durch (i) den Einfluss des Mondes, (ii) den Einfluss der Sonne, (iii) Luftdruckschwankungen.

Aufgabe 6. Die Hilfsgrößen δ_{ij} und ε_{ijk} (4 Punkte)

Wir verwenden die Einstein'sche Summationskonvention, die beinhaltet, dass implizit über die doppelten Indizes in einem Ausdruck summiert wird.

- (a) Berechnen Sie die Ausdrücke δ_{ii} , $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk}$ und $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk}$.
- (b) Zeigen Sie: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$ und $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.
- (c) Zeigen Sie analytisch (nicht geometrisch) mit Hilfe von (b) für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\hat{\alpha}| = 1$: $\mathbf{x} = (\hat{\alpha} \cdot \mathbf{x})\hat{\alpha} - \hat{\alpha} \times (\hat{\alpha} \times \mathbf{x})$.

Aufgabe 7. Polarkoordinaten (11 Punkte)

Betrachten Sie ein punktförmiges Teilchen in der Ebene, dessen Aufenthaltsort \mathbf{x} mittels Polarkoordinaten dargestellt werden kann:

$$\mathbf{x}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{x}| \equiv \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = \rho.$$

- (a) Geben Sie die radialen und tangentialen Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_\rho \equiv \frac{1}{\rho}\mathbf{x}$ bzw. $\hat{\mathbf{e}}_\varphi \equiv \frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\rho$ explizit als Funktionen des Winkels φ an. Zeigen Sie: $\frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\rho$.

Betrachten Sie die Bahn $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{x}(\rho, \varphi)$ des Teilchens, parametrisiert durch die zeitabhängigen Funktionen $\rho(t)$ und $\varphi(t)$.

- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens als Linearkombinationen von $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

Betrachten Sie nun speziell ein Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf der *Kardioide* $\rho = k(1 + \cos \varphi)$ bewegt.

- (c) Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens.
- (d) Berechnen Sie die Beschleunigung, ihr Betrag und die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens mit Hilfe der Ergebnisse aus (b).

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 2 – Abgabe: 30.04.2012

1. (12 P.) Anwendungen der Kettenregel

- (a) Betrachten Sie eine Funktion der Form $\bar{g}(t) = g(f_1(t), f_2(t))$ mit $f_{1,2} \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\frac{d\bar{g}}{dt}(t)$ allgemein nach der Kettenregel.
- (b) Betrachten Sie eine Funktion der Form $\bar{g}(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ mit $f_{1,2} \in \mathbb{R}$ und $x_{1,2} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\partial_{x_1}\bar{g} = (\partial_{f_1}g)\partial_{x_1}f_1 + (\partial_{f_2}g)\partial_{x_1}f_2$ und berechnen Sie analog $\partial_{x_2}\bar{g}$.
- (c) Betrachten Sie eine Funktion $F(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der Eigenschaft $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\alpha F(\mathbf{x})$ oder explizit:

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fest, } \forall \lambda > 0).$$

Zeigen Sie durch geeignetes Ableiten: $x_1\partial_{x_1}F + x_2\partial_{x_2}F + \dots + x_n\partial_{x_n}F = \alpha F$. Überprüfen Sie diese Beziehung konkret am Beispiel $F(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1(x_2)^3 - 5(x_2)^4$.

- (d) Betrachten Sie die Funktion $\bar{v}(\rho, \varphi) \equiv v(x_1(\rho, \varphi), x_2(\rho, \varphi))$ mit $x_1(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi)$ und $x_2(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi)$. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2.$$

2. (8 P.) Berechnung partieller Ableitungen

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $v(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ die Gleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0$ erfüllt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $v(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ und beliebigen (glatten) Funktionen f_1 und f_2 die Gleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ erfüllt.