



Aufgabe 8. Hintereinanderausführung von Drehungen (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Abbildung, die aus einer Drehung um den Winkel φ um die x_2 -Achse und einer anschließenden Drehung um den Winkel φ um die x_3 -Achse resultiert.

- (a) Geben Sie die resultierende Drehmatrix R an.
- (b) Bestimmen Sie die zugehörige Drehachse und den Drehwinkel α . Hinweis: überlegen Sie, welche Eigenwerte eine Drehmatrix i.A. haben kann.

Aufgabe 9. Sphärisch symmetrische Massenverteilungen (12 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m mit Koordinaten $\mathbf{x}(t)$, das die Gravitationskraft einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung („Erde“) mit der Massendichte $\rho(|\mathbf{x}'|)$ spürt, lautet:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \rho(|\mathbf{x}'|) \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad .$$

Wir definieren noch: $\mathbf{x} \equiv x\hat{\mathbf{e}}$ mit $x > 0$ und $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g, \hat{\mathbf{e}})\hat{\mathbf{e}}$ gilt. Warum kann man bei der Berechnung von $(g, \hat{\mathbf{e}})$ o. B. d. A. $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_3$ annehmen?
- (b) Zeigen Sie, indem Sie wie üblich Kugelkoordinaten einführen und auf die neue Variable $\xi \equiv \cos(\vartheta)$ übergehen:

$$g(x) \equiv (\mathbf{g}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{e}}) = 2\pi\mathcal{G} \int_0^{R_E} dr r^2 \rho(r) \int_{-1}^1 d\xi \frac{r\xi - x}{(r^2 + x^2 - 2rx\xi)^{3/2}} \quad ,$$

wobei R_E den Erdradius bezeichnet.

- (c) Zeigen Sie für den Fall, dass das Teilchen sich außerhalb der Erdoberfläche aufhält (also für $x > R_E$): $g(x) = -\frac{\mathcal{G}M_E}{x^2}$.
- (d) Zeigen Sie für den Fall, dass das Teilchen sich im Erdinneren befindet: $g(x) = -\frac{\mathcal{G}M_E(x)}{x^2}$ mit $M_E(x) = 4\pi \int_0^x dr r^2 \rho(r)$. Interpretieren Sie dieses Resultat.
- (e) **Bonusteil:** Wir bohren nun einen Tunnel vom Nord- zum Südpol quer durch die Erde und lassen das Teilchen der Masse m mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ genau über dem Eingang des Tunnels beim Nordpol los. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Massendichte der Erde konstant (d. h. r -unabhängig) ist: $\rho(r) = \rho$ und Reibungseffekte vernachlässigbar sind.

Stellen Sie die entsprechende Bewegungsgleichung des Teilchens auf und lösen Sie diese. Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens in Worten. Kehrt das Teilchen jemals zum Nordpol zurück? Wenn ja: Bestimmen Sie die approximative Rückkehrzeit (in Sekunden sowie in Stunden).

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 3 – Abgabe: 07.05.2012

1. (10 P.) Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante

In der Vorlesung wurden für allgemeine Funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{a}), \dots, f_n(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ die Funktionalmatrix $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$ und die Funktional- oder Jacobi-Determinante $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}\right)$ eingeführt.

- (a) Betrachten Sie die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \equiv (a_1^2 \cos(a_2), a_1 \sin(a_2))$ und berechnen Sie $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$ und $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$. Bestimmen Sie die Bilder der Geraden $a_1 = a_{10}$ und $a_2 = a_{20}$, wobei a_{10} und a_{20} vorgegebene reelle Konstanten sind, unter \mathbf{f} .
- (b) Betrachten Sie die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \equiv (a_1 a_2 \cos(a_3), a_1 a_2 \sin(a_3), \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2))$ und berechnen Sie $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$ und $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$. Bestimmen Sie die Bilder der Ebenen $a_1 = a_{10}$, $a_2 = a_{20}$ und $a_3 = a_{30}$, wobei a_{i0} mit $i = 1, 2, 3$ eine reelle Konstante ist, unter \mathbf{f} .

2. (10 P.) Das Druckfeld auf einer Landkarte

Betrachten Sie die Funktion $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x_1, x_2) \equiv p_0 - \frac{p_1 R^2}{x_1^2 + 3x_2^2 + R^2}$, die den atmosphärischen Druck mit einer Depression am Ursprung beschreibt. Die Parameter p_0 , p_1 und R sind positive Konstanten mit $p_0 > p_1$.

- (a) Rechnen Sie den Gradienten $\nabla p(\mathbf{x})$ von $p(\mathbf{x})$.
- (b) Rechnen Sie die Hess'sche Matrix $\frac{\partial^2 p(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$.
- (c) Geben Sie die Taylor Entwicklung von $p(\mathbf{x})$ am Ursprung bis zum quadratischen Term an.
- (d) Beschreiben Sie die isobaren Kurven, d.h. die Kurven, entlang denen der Druck $p = \bar{p}$ konstant bleibt.
- (e) Parametrisieren Sie die isobaren Kurven als eine Funktion $\mathbf{f}_{\bar{p}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, und rechnen Sie den Tangentialvektor $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$. Verifizieren Sie, dass $\nabla p(\mathbf{f}_{\bar{p}}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt}(t) = 0 \quad \forall t$.