Aufgabenblatt 05, Abgabe: 21. 05. 2012

Aufgabe 12. Energiegewinnung (8 Punkte)

Ein Reisender befindet sich bezüglich eines mit der Geschwindigkeit v_0 geradeaus fahrenden Zuges zunächst in Ruhe. Zur Zeit t_0 setzt er sich mit konstanter Beschleunigung a in Fahrtrichtung in Bewegung, bis er eine Relativgeschwindigkeit v_r (relativ zum Zug) erreicht hat.

(a) Nehmen Sie zunächst an, dass der Zug seine Geschwindigkeit beibehält. Welche Arbeit W leistet der Reisende? Welche kinetische Energie gewinnt er? Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie erhalten ist.

(b) Ist die angenommene Konstanz der Beschleunigung wesentlich?

(c) Nehmen Sie nun an, dass der Zug antriebsfrei und ohne äußere Kräfte rollt. Berechnen Sie die vom Reisenden geleistete Arbeit sowie die Energieänderungen von Reisendem und Zug und weisen Sie wiederum Energieerhaltung nach.

Aufgabe 13. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte (9 Punkte)

Wir betrachten ein System wechselwirkender Punktmassen m_i ($i = 1, \ldots, N$) mit einer auf das i-te Teilchen wirkenden Kraft

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ji} \quad , \quad \mathbf{f}_{ji} = f_{ji}(|\mathbf{x}_{ji}|, |\dot{\mathbf{x}}_{ji}|)\hat{\mathbf{x}}_{ji} \quad , \quad \mathbf{x}_{ji} \equiv \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \quad , \quad f_{ji} = f_{ij}\,. \tag{1}$$

(a) Ist diese Form der Kraft $\mathbf{F}_i$ verträglich mit der Galilei-Invarianz des Systems? Erfüllt die Kraft $\mathbf{F}_i$ das in der Vorlesung behandelte dritte Newton'sche Gesetz?

(b) Bestimmen Sie, ob für Kräfte $\mathbf{F}_i$ dieser Form allgemein $\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{0}$, $\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{0}$ bzw. $\frac{d}{dt}E = 0$ gilt, wobei $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, E)$ den Gesamtimpuls, den Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie des Systems darstellen.

Wir betrachten nun den Spezialfall der Anziehung eines einzelnen Teilchens (mit der Masse m) durch die $N-1$ übrigen, die die „Erde“ bilden (Masse M_E, Radius R_E), und nehmen an, dass die relevante Bewegungsgleichung für das einzelne Teilchen durch

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \left[-\frac{\mathcal{G}\, m\, M_\mathrm{E}}{x^2} + \gamma(x)|\dot{\mathbf{x}}|^2\right]\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad x \equiv |\mathbf{x}| \quad , \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = 0 \quad , \quad |\mathbf{x}(0)| > R_\mathrm{E} \tag{2}$$

gegeben ist, wobei $\gamma(x)$ den Reibungskoeffizienten darstellt (der genügend glatt sei für $x \gtrsim R_\mathrm{E}$).

(c) Leiten Sie aus (2) in der Nähe der Erdoberfläche (d. h. für $x = R_\mathrm{E} + z$, $0 < \frac{z}{R_\mathrm{E}} \ll 1$) eine eindimensionale Bewegungsgleichung für $z(t)$ her und lösen Sie diese.

(d) Sind Ansätze der Form (1) oder (2) realistisch? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 14. Konservative Kräfte (3 Punkte)

Betrachten Sie ein abgeschlossenes mechanisches System, das aus zwei Teilchen besteht. Auf Teilchen 1 und 2 wirken die Kräfte $\mathbf{f}_{21} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}_{21})$ bzw. $\mathbf{f}_{12} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}_{12})$, wobei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch

$$(i)\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (ii)\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sin^5\left[e^{x^2+\sin(x)}\arctan(x)\right]\hat{\mathbf{x}}\,,$$

gegeben ist und wie üblich $x \equiv |\mathbf{x}|$ und $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/x$ gilt. Bestimmen Sie jeweils, ob diese Zweiteilchenkräfte konservativ sind.

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 5 – Abgabe: 21.05.2012

1. (4 P.) **Doppelte Rotationen**

   Als „doppelte Rotation“ eines Vektorfelds $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ bezeichnen wir $[\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a})]\,(\boldsymbol{x})$. Zeigen Sie durch Berechnung der doppelten Rotation

   (a) eines Vektorfelds $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$, das für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}$ erfüllt, dass $\Delta \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{j}$ gilt.

   (b) eines Vektorfelds $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, das für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ erfüllt, dass $\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\rho$ gilt.

   Hierbei sind $\rho(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ differenzierbar und ansonsten beliebig.

2. (10 P.) **Bogenlänge und skalare Kurvenintegrale**

   Die Bogenlänge s ist bekanntlich gemäß der Beziehung $ds = [(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]^{1/2}$ mit infinitesimalen Änderungen $d\boldsymbol{x}$ des Ortsvektors verknüpft.

   (a) (6 P.) Betrachten Sie eine beliebige (glatte) Bahnbewegung $\boldsymbol{x}(t)$ eines Massenpunktes. Zeigen Sie zuerst allgemein:

   $$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad , \quad |\dot{\boldsymbol{x}}| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \quad , \quad \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}_\perp + \boldsymbol{a}_\parallel$$

   mit der *Normal*beschleunigung $\boldsymbol{a}_\perp \equiv \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ und der *Tangential*beschleunigung $\boldsymbol{a}_\parallel \equiv \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$. Beweisen Sie, dass $\boldsymbol{a}_\perp$ und $\boldsymbol{a}_\parallel$ in der Tat senkrecht sind.

   (b) (2 P.) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\left\{\boldsymbol{x} \middle|\; x_2 = x_3 = \frac{1}{2}x_1^2\,,\; 0 \le x_1 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

   (c) (2 P.) Berechnen Sie allgemein die Bogenlänge der Kurve $\boldsymbol{x}(\varphi) = \rho(\varphi)\,(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le 2\pi$ und differenzierbarem $\rho(\varphi) \ge 0$.

3. (6 P.) **Vektorielle Kurvenintegrale**

   Betrachten Sie die an einem Massenpunkt, der unter der Einwirkung der Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ die Bahn $\boldsymbol{x}(t)$ durchläuft, verrichtete Arbeit für die Fälle (mit $0 \le t \le 2\pi$):

   $$\text{(i) } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \boldsymbol{x}\;,\; \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii) } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1\,x_2 \\ 1 \\ x_2\,x_3 \end{pmatrix}\;,\; \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

   $$\text{(iii) } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3^2 \\ 2x_1x_3 - 4x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}\;,\; \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 0 \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}.$$