



Aufgabe 15. Gegeneinander bewegte Bezugssysteme (13 Punkte)

Ein Bademeister steht im Abstand a vom (geradlinigen) Ufer eines Fluss-Schwimmbades. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers ist v_F . Plötzlich bemerkt er, dass ein Kind im Abstand b vom Ufer und eine Strecke y_0 flussabwärts von einer Luftmatratze fällt und abgetrieben wird. Auf welchem Weg erreicht er das Kind am schnellsten, wenn er mit der Geschwindigkeit v_1 rennen und mit der Geschwindigkeit v_2 schwimmen kann? Wie lange braucht er?

- (a) Wie sieht der schnellste Weg unter der Bedingung aus, dass der Bademeister eine Strecke s flussabwärts in das Wasser steigt? Geben Sie die vom Bademeister benötigte Zeit $T(s)$ an.
- (b) Geben Sie die allgemeine Bestimmungsgleichung für die optimale Wahl von s im generischen Fall ($a > 0, b > 0$) an. Ist die Lösung eindeutig?
- (c) Vereinfachen und lösen Sie die Bestimmungsgleichung aus b) für den Fall, dass der Bademeister schon am Ufer steht ($a = 0$). Sind für die Bestimmung des schnellsten Weges Fallunterscheidungen nötig?
- (d) Vereinfachen Sie die Bestimmungsgleichungen für den Grenzfall verschwindender Fließgeschwindigkeit $v_F = 0$. Geben Sie die Lösung für $y_0 \ll a, y_0 \ll b$ an und bestimmen Sie für diesen Fall auch das Verhältnis $\tan(\varphi_1)/\tan(\varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 die Winkel der Bahn zur Normalen des Ufers auf Land- bzw. Wasserseite sind.

Aufgabe 16. Transformationen unter Drehungen (7 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass für beliebige Drehungen $R(\boldsymbol{\alpha})$ gilt (Einsteinsche Summenkonvention):

$$\varepsilon_{ijk} R_{il} R_{jm} R_{kn} = \varepsilon_{lmn}, \quad \delta_{ij} R_{il} R_{jm} = \delta_{lm}$$

wobei R_{il} das (il) -Element der Drehmatrix $R(\boldsymbol{\alpha})$ darstellt.

- (b) Beweisen Sie, vorzugsweise mit Hilfe der Größe ε_{ijk} , die Rechenregel

$$[R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{a}] \times [R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{b}] = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad ,$$

die für beliebige Drehungen $R(\boldsymbol{\alpha})$ und beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 6 – Abgabe: 29.05.2012

1. (9 P.) Der Laplace Operator

(a) (1 P.) Beweisen Sie folgende Identität: $\Delta(\lambda\mu) = \lambda\Delta\mu + \mu\Delta\lambda + 2\nabla\lambda \cdot \nabla\mu$.

(b) (3 P.) Sei $f(\mathbf{x}) = r^\nu$, $r(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass $\Delta f(\mathbf{x}) = \nu(\nu + 1)r^{\nu-2}$, $r \neq 0$.

Folgern Sie, dass $\Delta \frac{1}{r(\mathbf{x})} = 0$, $r \neq 0$.

(c) (3 P.) Betrachten Sie nun $f(\mathbf{x}) = \rho^\nu$, $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Zeigen Sie, dass $\Delta \rho^\nu = \nu^2 \rho^{\nu-2}$.

(d) (2 P.) Zeigen Sie, dass $\Delta \log \rho(\mathbf{x}) = 0$, $\rho \neq 0$.

Hinweis: $\log u = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{u^\nu - 1}{\nu}$.

2. (6 P.) Die Fläche eines Kegels

Betrachten Sie einen geraden Kreiskegel der Höhe h mit einem Basiskreis des Radius R .

(a) Berechnen Sie die Seitenfläche des Kegels mit Hilfe der in der Vorlesung behandelten Methode für Flächen der Form $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, z(u_1, u_2))$.

(b) Betrachten Sie den Kegel als Rotationskörper und berechnen Sie seine Mantelfläche mit Hilfe der ersten Guldin'schen Regel.

3. (5 P.) Fläche eines Torus

Betrachten Sie den Torus, der sich durch Drehung des Kreises

$$\{\mathbf{x} \mid (x_1 - a)^2 + (x_3)^2 = R^2, x_2 = 0\}$$

um die $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse ergibt (mit $a > R > 0$). Parametrisieren Sie den Torus durch

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho(u_2) \cos(u_1) \\ \rho(u_2) \sin(u_1) \\ R \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \rho(u_2) = a + R \cos(u_2), \quad \mathbf{u} \in [0, 2\pi]^2 \equiv \mathcal{R}.$$

(a) Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung $|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|$ mit $\mathbf{t}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ ($i = 1, 2$).

(b) Berechnen Sie aus (a) die Fläche $|\mathcal{F}| = \int_{\mathcal{R}} d\mathbf{u} |\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|$ des Torus.