



Aufgabe 17. Der Sturz ins Zentrum (10 Punkte)

Wir betrachten das Zweiteilchenproblem $\mu\ddot{\mathbf{x}} = -V'(x)\hat{\mathbf{x}}$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$ für den Relativvektor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{21}(t)$ zweier miteinander wechselwirkender Teilchen und nehmen an, dass das Potential $V(x)$ die Form

$$V(x) = V_0 x^\alpha \quad (V_0 < 0, \alpha < -2)$$

hat. Die Kraft, die die Teilchen aufeinander ausüben, ist somit stark *attraktiv*. Des Weiteren nehmen wir an, dass der (erhaltene) Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem durch $\mathbf{L}^{(S)} = L\hat{\mathbf{e}}_3$ mit $L > 0$ gegeben ist und dass zur Anfangszeit $t = 0$ gilt: $\dot{x}(0) < 0$ und $x(0) < x_m$ mit

$$x_m \equiv \left(\frac{\alpha\mu V_0}{L^2} \right)^{\frac{1}{|\alpha+2|}}.$$

- Zeigen Sie, dass die beiden Teilchen innerhalb einer *endlichen* Zeit $T > 0$ in den Massenschwerpunkt stürzen. Geben Sie einen *exakten* Ausdruck für T in der Form eines Integrals an. (Sie brauchen dieses Integral nicht explizit zu berechnen.) Erläutern Sie insbesondere, an welcher Stelle Sie die Einschränkung $x(0) < x_m$ verwendet haben.
- Entscheiden Sie, ob die beiden Teilchen *endlich viele* oder *unendlich viele* Umläufe um den Massenschwerpunkt ausführen, bevor sie in ihn hineinstürzen. Erläutern Sie Ihre Antwort.
- Wie ist der Sturz in den Massenschwerpunkt mit der Drehimpulserhaltung vereinbar?

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 7 – Abgabe: 04.06.2012

1. (12 P.) Satz von Stokes

Der Stokes'sche Satz lautet in der üblichen Notation:

$$\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Betrachten Sie als Spezialfall für die orientierte Fläche \mathcal{F} ein Segment eines (elliptischen) Paraboloids mit dem kreisförmigen Rand $\partial\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \mid x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq 2\} \quad , \quad \partial\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 2\} .$$

Der Normalvektor auf \mathcal{F} hat eine positive 3-Komponente: $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 > 0$. Das Vektorfeld \mathbf{g} hat die Form $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_2, 2x_3, x_1^2)$.

- Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (u_1 \cos(u_2), u_1 \sin(u_2), \frac{1}{2}u_1^2)$ mit $\mathbf{u} \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung der orientierten Fläche \mathcal{F} darstellt.
- Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ ($i = 1, 2$), und zeigen Sie für den Normalvektor: $\hat{\mathbf{n}} = (1 + u_1^2)^{-1/2}(-u_1 \cos(u_2), -u_1 \sin(u_2), 1)$.
- Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit.
- Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes für diesen Spezialfall.

2. (8 P.) Satz von Stokes in der Ebene

Wir betrachten eine orientierte Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ in der $\hat{\mathbf{e}}_1$ - $\hat{\mathbf{e}}_2$ -Ebene mit der (mittels der Bogenlänge s parametrisierten) geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{F} = \{(x_1(s), x_2(s), 0)\}$ als orientiertem Rand. Neben dem Tangentialvektor $\mathbf{x}'(s) \equiv (\frac{dx_1}{ds}(s), \frac{dx_2}{ds}(s), 0)$ an der Kurve definieren wir den Vektor $\mathbf{n} \equiv (x_2', -x_1', 0)$.

- Zeigen Sie: $|\mathbf{x}'(s)| = 1$, $|\mathbf{n}(s)| = 1$, $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n} = 0$ und $\det(\mathbf{n}, \mathbf{x}', \hat{\mathbf{e}}_3) = 1$.
- Zeigen Sie für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ mit Hilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\int_{\partial\mathcal{F}} ds (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = \int_{\mathcal{F}} dx_1 dx_2 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) .$$

Hinweis: benutzen Sie die Tatsache, dass $\mathbf{n} = \mathbf{x}' \times \mathbf{e}_3$.

Falls Sie eine Analogie zum Gauß'schen Satz sehen: Erklären Sie diese!