Aufgabenblatt 08, Abgabe: 11. 06. 2012

Aufgabe 18. Kreisbahnen und kleine Schwingungen (4 Punkte)

Betrachten Sie zwei Punktteilchen mit den Massen m_1 und m_2 und den Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, deren Zweiteilchenwechselwirkung aus einem Potential der Form $V(x) = V_0 \ln(x/x_0)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|\,, \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{21}$ und $x_0 > 0$ abgeleitet werden kann. Wir untersuchen dieses Problem im Schwerpunktsystem.

(a) Betrachten Sie zunächst mögliche Kreisbahnen für den Relativvektor $\mathbf{x}(t)$ der beiden Teilchen: Bestimmen Sie den Gesamtdrehimpuls $|\mathbf{L}^{(\mathrm{S})}|$ sowie die Kreisfrequenz ω_{K}, mit der die Kreisbahn durchlaufen wird, beide als Funktion des Radius $|\mathbf{x}(t)|$ der Kreisbahn.

(b) Betrachten Sie nun mögliche kleine Schwingungen um die Kreisbewegung: Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_{S}, mit der solche kleinen Schwingungen ausgeführt werden können, und entscheiden Sie, ob die Bahn einer kleinen Schwingung um die Kreisbahn (im Rahmen der harmonischen Näherung) geschlossen ist.

Aufgabe 19. Elliptische Kepler-Bahnen (16 Punkte)

Die Lösungen des Kepler-Problems $V(x) = -\dfrac{\mathcal{G}\mu M}{x}$ können allgemein in der Form $x(\varphi) = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$ geschrieben werden, wobei

$$p = \frac{L^2}{\mu^2 \mathcal{G} M} \quad , \quad E^{(\mathrm{S})} = -\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathcal{G}\mu M}{L}\right)^2 (1-\varepsilon^2)$$

und für elliptische Kepler-Bahnen zusätzlich noch $p = a_1(1-\varepsilon^2) = a_2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ gilt. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf solche elliptischen Bahnen.

(a) Zeigen Sie für die Halbachsen a_1 und a_2:

$$a_1 = \frac{\mathcal{G}\mu M}{2|E^{(\mathrm{S})}|} \quad , \quad a_2 = \frac{L}{\sqrt{2\mu|E^{(\mathrm{S})}|}} \quad .$$

(b) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{\mu x^2}{2|E^{(\mathrm{S})}|[(a_1\varepsilon)^2 - (x-a_1)^2]} \quad . \tag{1}$$

(c) Substituieren Sie die Parametrisierung $x(\xi) = a_1[1-\varepsilon\cos(\xi)]$ in (1). Wählen Sie die Anfangsbedingung so, dass $\xi = 0$ zur Zeit $t = 0$ gilt. Zeigen Sie nun:

$$t(\xi) = \frac{(a_1)^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M}}\,[\xi - \varepsilon\sin(\xi)] \quad .$$

(d) Skizzieren Sie die durch ξ parametrisierte Kurve $\left(a_1^{-3/2}\sqrt{\mathcal{G}M}\,t(\xi)\,,\, a_1^{-1}x(\xi)\right)$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und im Grenzfall $\varepsilon \uparrow 1$.

(e) Zeigen Sie: $x_1 = a_1[\cos(\xi) - \varepsilon]$ und $x_2 = a_1\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\xi)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \equiv x(\varphi)\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$.

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 8 – Abgabe: 11.06.2012

1. (6 P.) **Eine Identität für den Levi-Civita-Tensor**

   Zeigen Sie für alle $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$ die Identität:

   $$\varepsilon_{ikl}\delta_{jm} + \varepsilon_{ilj}\delta_{km} + \varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \varepsilon_{jkl}\delta_{im}.$$

   Hinweis: Betrachten Sie Fallunterscheidungen, z. B. $i = m$ vs. $i \neq m$, usw.

2. (14 P.) **Der Gauß'sche Satz**

   Der Gauß'sche Satz lautet bekanntlich:

   $$\int_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{f} \quad , \tag{1}$$

   wobei $\mathcal{V}$ ein orientiertes Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Als erste Anwendung betrachten wir eine Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, x_3)$ und ein Integrationsvolumen

   $$\mathcal{V} = \left\{\boldsymbol{x} \mid 0 \leq x_3 \leq 3\ ,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 9\right\}$$

   mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

   (a) Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit.

   (b) Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

   Als zweite Anwendung betrachten wir eine Funktion
   $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (2x_1x_2 + x_3, x_2^2, -x_1 - 3x_2)$ und ein Integrationsvolumen

   $$\mathcal{V} \equiv \{\boldsymbol{x} \mid x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0\ ,\ 2(x_1 + x_2) + x_3 \leq 6\}$$

   mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

   (a) Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit.

   (b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung des orientierten Dreiecks $\{\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{V} \mid 2(x_1 + x_2) + x_3 = 6\}$ und berechnen Sie die entsprechenden Tangentialvektoren sowie den Normalvektor mit Hilfe dieser Parametrisierung.

   (c) Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.