



Aufgabe 20. Kosmische Geschwindigkeiten (4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die minimale Geschwindigkeit („Fluchtgeschwindigkeit“ oder „zweite kosmische Geschwindigkeit“), die ein Teilchen benötigt, um (unter Vernachlässigung der Einflüsse aller anderen Himmelskörper) aus dem Schwerkraftfeld der Erde zu entkommen. Beantworten Sie dieselbe Frage für die Schwerkraftfelder der Sonne bzw. der Milchstraße (im letzten Fall genügt eine vernünftige Schätzung).
- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit („erste kosmische Geschwindigkeit“) eines Teilchens, das sich entlang einer Kreisbahn nahe der Erdoberfläche um die Erde bewegt. Bestimmen Sie analog die erste kosmische Geschwindigkeit für eine Kreisbahn um die Sonne (entlang deren Oberfläche). Wie verhalten sich die ersten und zweiten kosmischen Geschwindigkeiten zueinander?

Aufgabe 21. Dynamik der Lösungen des Kepler-Problems (16 Punkte)

Die Winkelabhängigkeit $t(\varphi)$ der Zeitvariablen im Kepler-Problem ist bekanntlich sowohl für Ellipsen ($0 \leq \varepsilon < 1$) als auch für Parabeln ($\varepsilon = 1$) und Hyperbeln ($\varepsilon > 1$) gegeben durch:

$$t(\varphi) = \frac{\mu p^2}{L} \tau(\varphi) \quad , \quad \tau(\varphi) = \int_0^\varphi d\varphi' \frac{1}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi')]^2} \quad .$$

- (a) Zeigen Sie für alle $\varepsilon \geq 0$:

$$\tau(\varphi) = -\tau(-\varphi) \quad ; \quad \tau(\varphi) \sim \frac{\varphi}{(1 + \varepsilon)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon \varphi^2}{3(1 + \varepsilon)} + \dots \right] \quad (\varphi \rightarrow 0) \quad .$$

- (b) Zeigen Sie für $\varepsilon \geq 1$ durch Analyse des Integrals $\tau(\varphi)$ nahe $\varphi_\infty \equiv \pi - \arccos(\frac{1}{\varepsilon})$:

$$\tau(\varphi) \sim \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} (\varphi_\infty - \varphi)^{-1} & (\varphi \uparrow \varphi_\infty, \varepsilon > 1) \\ \frac{4}{3} (\pi - \varphi)^{-3} & (\varphi \uparrow \varphi_\infty = \pi, \varepsilon = 1) \end{cases} \quad .$$

- (c) Zeigen Sie für elliptische Bahnen ($0 \leq \varepsilon < 1$) durch direkte Differentiation:

$$\tau(\varphi) = \frac{-1}{1 - \varepsilon^2} \left\{ \frac{\varepsilon \sin(\varphi)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \tan(\frac{1}{2}\varphi)}{1 + \varepsilon} \right] \right\} \quad .$$

- (d) Zeigen Sie für $\varepsilon = 1$ außerdem unter Verwendung von $\cos(\varphi) = 2 \cos^2(\frac{1}{2}\varphi) - 1$ durch explizite Berechnung:

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2} \tan(\frac{1}{2}\varphi) \left[1 + \frac{1}{3} \tan^2(\frac{1}{2}\varphi) \right] \quad .$$

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 9 – Abgabe: 18.06.2012

1. (14 P.) Der Gauß'sche Satz (II)

Der Gauß'sche Satz lautet bekanntlich:

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{f}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} \quad , \quad (1)$$

wobei \mathcal{V} ein orientiertes Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Als erste Anwendung betrachten wir eine Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_3^2 - x_1, -x_1x_2, 3x_3)$ und ein Integrationsvolumen $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid 0 \leq x_1 \leq 3, \quad |x_3| \leq 4 - x_2^2\}$ mit nach innen gerichtetem Normalvektor.

- (a) (4 P.) Berechnen Sie entweder das rechte oder das linke Glied von Gleichung (1), je nachdem was bequemer für Sie ist.

Als zweite Anwendung betrachten wir eine Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (2x_1 + 3x_3, -x_1x_3 - x_2, x_2^2 + 2x_3)$ und ein Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq 3\} \quad , \quad \mathbf{x}_0 \equiv (3, -1, 2).$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

- (b) (4 P.) Berechnen Sie das *linke* Glied von Gleichung (1) explizit.
- (c) (6 P.) Berechnen Sie das *rechte* Glied von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (b) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

2. (6 P.) Der erste Green'sche Satz

Der erste Satz von Green lautet bekanntlich

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathbf{x} [(\nabla\mu) \cdot (\nabla\nu) + \mu\Delta\nu] = \int_{\partial\mathcal{V}} dS \mu \frac{\partial\nu}{\partial n} . \quad (2)$$

Dieser Satz findet seine Anwendung z. B. beim Nachweis der Eindeutigkeit von Lösungen elektrostatischer Probleme. Betrachten Sie z. B. die Gleichung $(\Delta\Phi)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x})$ für das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, wobei sowohl die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ in \mathcal{V} als auch der Potentialwert $V(\mathbf{x})$ auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$ vorgegeben sind: $\Phi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}$. Um nachzuweisen, dass $\Phi(\mathbf{x})$ durch diese Informationen eindeutig festgelegt ist, nimmt man zunächst an, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen $\Phi_1 \neq \Phi_2$:

- (a) Betrachten Sie die Differenzfunktion $w \equiv \Phi_1 - \Phi_2$. Zeigen Sie, dass w für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ die Gleichung $(\Delta w)(\mathbf{x}) = 0$ und für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}$ die Gleichung $w(\mathbf{x}) = 0$ erfüllt.
- (b) Leiten Sie aus (a) und Gleichung (2) mit der Wahl $\mu = \nu = w$ ab:
 $\int_{\mathcal{V}} d\mathbf{x} [(\nabla w)(\mathbf{x})]^2 = 0$. Was schließen Sie hieraus?