Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Einführung in die Theoretische Physik“ (SS 2012)
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 10, Abgabe: 25. 06. 2012

Aufgabe 22. Geschlossene und nicht-geschlossene Bahnen (7 Punkte)

Nehmen wir an, zwei Punktteilchen der Massen m_1 bzw. m_2 üben eine anziehende Kraft aufeinander aus, die das dritte Newton'sche Gesetz erfüllt und aus dem Zweiteilchenpotential $V(x) = -\frac{A}{x} - \frac{B}{2x^2}$ (mit $A > 0$ und $B > 0$) hergeleitet werden kann. Betrachten Sie nun das effektive Einteilchenproblem für den Relativvektor $\mathbf{x}(t)$ der beiden Punktmassen im Schwerpunktsystem.

(a) Zeigen Sie, dass für $L^2/\mu > B$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren, die das Attraktionszentrum $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit dem Perizentrum bzw. dem Apozentrum der Bahn verbinden, durch

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\mu B}{L^2}}} \ ,$$

gegeben ist, wobei μ die reduzierte Masse und L den Betrag des Gesamtdrehimpulses darstellt.

(b) Ist die Bahn im Allgemeinen geschlossen? Falls nein: Ist sie jemals geschlossen?

Aufgabe 23. Beispiel eines exakt lösbaren Dreiteilchenproblems (13 Punkte)

Das allgemeine Problem der Dynamik dreier Punktteilchen mit den Massen m_1, m_2 und m_3, die einander mittels ihrer Gravitationskräfte gegenseitig anziehen, ist nicht allgemein lösbar. Ein exakt lösbarer Spezialfall ist jedoch die Bewegung dreier gleicher Massen ($m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$), die zu jedem Zeitpunkt ein *gleichseitiges Dreieck* in einer (in irgendeinem Inertialsystem *festen*) Ebene bilden. Zu jeder Zeit t sind die (i. A. zeitabhängigen) Abstände der drei Teilchen zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt also gleich; wir bezeichnen diese drei gleichen Abstände als $x(t)$.

(a) Stellt die Annahme, dass die Bewegung in einer festen Ebene stattfindet, eine zusätzliche Einschränkung dar?

O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Bewegung in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-$\hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene stattfindet und dass die Koordinaten von Teilchen 1 im Schwerpunktsystem durch $\mathbf{x}(t) = x(t)(\cos[\varphi(t)], \sin[\varphi(t)], 0)$ gegeben sind. Wir bestimmen nun die Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass Teilchen 2 und 3 sich in $\mathbf{x}_+$ und $\mathbf{x}_-$ befinden mit:

$$\mathbf{x}_\pm \equiv \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{x}_\perp - \tfrac{1}{2}\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}_\perp \equiv x \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

(c) Zeigen Sie für die Bewegungsgleichung von Teilchen 1:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathcal{G}m(\mathbf{x}_+ - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}|^3} + \frac{\mathcal{G}m(\mathbf{x}_- - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_- - \mathbf{x}|^3} \overset{!}{=} -\frac{\mathcal{G}m\mathbf{x}}{\sqrt{3}\,x^3} \quad .$$

(d) Erklären Sie die Beziehung zwischen dem hier betrachteten exakt lösbaren 3-Teilchen-Problem und dem Kepler-Problem und geben Sie die (3-Teilchen)-Lösungen an.

(e) Ist die Dynamik stabil (im Vergleich zum 2-Teilchen-System)?

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 10 – Abgabe: 25.06.2012

1. (12 P.) **Die Deltafunktion**

   Die Deltafunktion $\delta(x)$ ist dadurch definiert, dass sie in Integralen, in Kombination mit einer beliebigen, jedoch genügend glatten Funktion $f(x)$, die folgende Wirkung hat:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\ \delta(x-a) = f(a) \qquad (a \in \mathbb{R})\ .$$
   Insbesondere gilt also $\int dx f(x)\ \delta(x) = f(0)$. Die „Deltafunktion“ ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*. Sie kann im Limes $n \to \infty$ aus der Funktionenfolge $\Delta_n(x)$ erhalten werden, wobei $\Delta_n(x) \equiv n$ für $|x| \leq \frac{1}{2n}$ und $\Delta_n(x) \equiv 0$ für $|x| > \frac{1}{2n}$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass man die Deltafunktion allgemein im Limes $\epsilon \to 0$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\epsilon} f(x/\epsilon)$, wobei $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) = 1$. Beispiele dafür sind $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

   (b) Beweisen Sie die Eigenschaften: (i) $\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x)$ und (ii) $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, wobei angenommen wird, dass $f(x)$ nur einfache Nullstellen x_i hat und an diesen jeweils differenzierbar ist.

   Die Verallgemeinerung der Deltafunktion auf beliebige d Dimensionen ist:
$$\delta^{(d)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \delta(x_1-a_1)\ldots\delta(x_d-a_d) = \prod_{\ell=1}^{d} \delta(x_\ell - a_\ell)$$
   und hat die Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\ f(\boldsymbol{x})\ \delta^{(d)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a})$.

   (c) Beweisen Sie die Eigenschaft $\delta^{(d)}(\lambda\boldsymbol{x}) = |\lambda|^{-d}\,\delta^{(d)}(\boldsymbol{x})$.

   (d) Geben Sie die dreidimensionale Deltafunktion in Kugel- und Polarkoordinaten an.

2. (8 P.) **Greensche Funktion des Laplace-Operators**

   Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der δ-Funktion und des Gaußschen Integralsatzes, daß $\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$ die Gleichung $-\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ erfüllt. Hinweis: verwende den Gaußschen Integralsatz für das Vektorfeld $\boldsymbol{E} \equiv -\nabla\Phi$, welches die Gleichung $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ erfüllt, sowie die Kugelsymmetrie der Aufgabe.