Aufgabenblatt 12, Abgabe: 09. 07. 2012

Aufgabe 27. Kleine Schwingungen: Das lineare dreiatomige Molekül (13 Punkte)

Betrachten Sie ein lineares dreiatomiges Molekül, das nur Schwingungen in Richtung der Molekülachse ausführen kann. Bei der Untersuchung von möglichen kleinen Schwingungen haben wir also mit einem effektiv *ein*dimensionalen Problem zu tun. Die Koordinaten der drei Atome entlang der Molekülachse seien x_1, x_2 und x_3, die entsprechenden Massen m_1, m_2 und wiederum m_1. Als Anwendung könnte man z. B. an CO_2 denken. Die Ruhelängen der beiden Bindungen seien a, die Federkonstanten k. Das Dreiteilchenpotential ist somit durch

$$V(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{2}k[(x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2]$$

gegeben.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ auf. Überprüfen Sie, dass die Koordinatenwahl $x_{10} = -a$, $x_{20} = 0$ und $x_{30} = a$ einem möglichen Gleichgewichtszustand entspricht.

(b) Führen Sie neue Koordinaten $y_1 \equiv \sqrt{m_1}\,(x_1 + a)$, $y_2 \equiv \sqrt{m_2}\,x_2$ und $y_3 \equiv \sqrt{m_1}\,(x_3 - a)$ ein und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ die Form $\ddot{\mathbf{y}} = -B \cdot \mathbf{y}$ hat.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix B. Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenschwingungen des Moleküls (inklusive ihrer Zeitabhängigkeit) und skizzieren Sie sie.

Aufgabe 28. Elektromagnetische Potentiale und Galilei-Transformationen (7 Punkte)
Das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unter Galilei-Transformationen lautet, wie aus der Vorlesung bekannt, für $c \to \infty$:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \tag{1}$$
$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad , \tag{2}$$

wobei die Koordinatensysteme gemäß $\mathbf{x}'(\mathbf{x}, t) = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{v}t - \boldsymbol{\xi} = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{v}_\alpha t - \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ und $t'(\mathbf{x}, t) = t - \tau$ miteinander verknüpft sind. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das Transformationsverhalten

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{3}$$
$$\Phi'(\mathbf{x}', t') = \Phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

der elektromagnetischen Potentiale mit (1) und (2) verträglich ist.

(a) Zeigen Sie, dass (3) das Transformationsverhalten (2) impliziert.

(b) Zeigen Sie, dass (3) und (4) zusammen das Transformationsverhalten (1) implizieren.

(c) Implizieren (1) und (2) umgekehrt auch (3) und (4)?

(d) Ist das *Vektor*potential $\mathbf{A}$ ein echter oder ein Pseudovektor? Ist das *skalare* Potential Φ wirklich ein Skalar? Begründen Sie Ihre Antwort.

„Mathematische Rechenmethoden II“

Dozent: Jun.-Prof. Harvey B. Meyer

Sommersemester 2012 – Übungsblatt 12 – Abgabe: 09.07.2012

1. (10 P.) **Elektrostatisches Feld einer homogen geladenen Kugel**

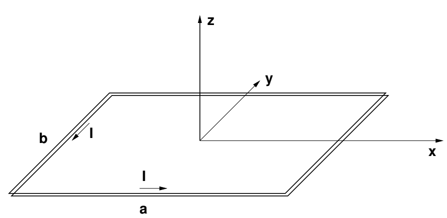
   Wir betrachten eine homogen geladene Kugel von Radius R mit ihrem Zentrum am Ursprung. Sie trägt insgesamt eine Ladung Q.

   (a) (2 P.) Bestimmen Sie mittels des Gaußschen Gesetzes $\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{Q_\Omega}{\epsilon_0}$ das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x}$.

   (b) (3 P.) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x})$ anhand der Dirac Delta-Funktion an.

   (c) (3 P.) Benutzen Sie die Lösung $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \, \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ für das elektrostatische Potenzial, um dann das elektrische Feld $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ zu bestimmen. Prüfen Sie, dass Sie das selbe Ergebnis wie unter (a) bekommen.

2. (10 P.) **Magnetisches Dipolfeld**



   Wir wollen das von der links abgebildeten Schleife erzeugte magnetische Feld mittels der formellen Lösung der Magnetostatik

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \, \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{1}$$

   in großen Entfernungen $R \gg a, b$ bestimmen. Der Strom I, der durch die Schleife fließt, ist zeitunabhängig.

   (a) (2 P.) Geben Sie die drei Komponenten j_x, j_y, j_z der Stromdichte an. Verwenden Sie dafür die Delta Funktion und die Heaviside Funktion $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

   (b) (3 P.) Berechnen nun das Integral (1) für die A_x Komponente indem Sie den Integranden in b/R Taylor entwickeln. Zeigen Sie, dass $A_x(\boldsymbol{R}) = -\frac{\mu_0 Iab}{4\pi} \frac{Y}{R^3}$, $\boldsymbol{R} = (X, Y, Z)$.

   (c) (3 P.) Benutzen Sie die Identitäten

$$\theta(x + a/2)\theta(x - a/2) \overset{a\to 0}{\to} a\delta(x)$$
$$\delta(y + \tfrac{b}{2}) - \delta(y - \tfrac{b}{2}) \overset{b\to 0}{\to} b\,\partial_y \delta(y)$$

   im Ausdruck der Stromverteilung, um A_x erneut zu berechnen.

   (d) (3 P.) Zeigen durch ein Symmetrie-Argument, dass $A_y(\boldsymbol{R}) = +\frac{\mu_0 Iab}{4\pi} \frac{X}{R^3}$. Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial durch den folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{R}}{R^3}, \tag{2}$$

   wobei das *magnetische Moment* in diesem Beispiel durch

$$\boldsymbol{\mu} = IS \cdot \boldsymbol{n} \tag{3}$$

   gegeben ist; $S = ab$ ist die von der Schleife begrentzten Fläche und $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$ der Einheitsvektor, der orthogonal zur Ebene ist, in der die Schleife sich befindet (orientiert nach der Korkenzieher-Regel). Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}(3(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_R - \boldsymbol{\mu})$.