Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 01, Abgabe: 02. 05. 2011

Aufgabe 1. Integrationen (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie (mit expliziter Herleitung) die Stammfunktionen von:

1. $x^n \ln(x)$ 2. $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ 3. $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ 4. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 5. $\dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$

(b) Bestimmen Sie die von der Ellipse $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}=1$ eingeschlossene Fläche.

Aufgabe 2. Welche Scheibe ist am leckersten? (3 Punkte)

Ein kugelförmiges Brötchen wird in 7 gleich dicke Scheiben geteilt. Ein Krustenliebhaber wünscht sich die Scheibe mit der (absolut) meisten Kruste. Soll er eines der beiden Enden nehmen oder doch lieber die mittlere Scheibe, oder ist dies egal?

Aufgabe 3. Zeitlich veränderliche Massen (10 Punkte)

Eine kleine Rakete hebt [mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0)=0$] von der Erdoberfläche ab, indem sie kontinuierlich Gas mit der Rate (Masse pro Zeiteinheit) μ und der Relativgeschwindigkeit v_{r} nach unten ausstößt. Die Masse $m(t)$ der Rakete ist daher explizit zeitabhängig: $\dot{m}(t)=-\mu$. Wir vernachlässigen die Luftreibung und nehmen an, dass die maximale Höhe, die die Rakete erreicht, so niedrig ist, dass die Erdbeschleunigung als konstant (d. h. gleich $-g$) angesehen werden kann.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes $\dfrac{dp}{dt}=F$ [mit $F=-m(0)g$] für den *Gesamt*impuls $p(t)$ von Rakete und Treibstoff zusammen, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete die Gleichung $\dot{v}=\dfrac{\mu v_{\mathrm{r}}}{m(0)-\mu t}-g$ erfüllt. Was ist die Bedingung dafür, dass die Rakete überhaupt zum Zeitpunkt $t=0$ von der Erdoberfläche abhebt?

(b) Berechnen Sie $v(t)$ und $h(t)\equiv\int_0^t dt'\ v(t')$ explizit und skizzieren Sie diese Größen für $0\le t\le T$ mit $T\equiv m(0)/\mu$. Nehmen Sie hierbei an, dass $\dot{v}(0)>0$ gilt. Wie verhalten sich die Höhe $h(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ nahe $t=T$?