Aufgabenblatt 02, Abgabe: 09. 05. 2011

Aufgabe 4. Schwerkraft (5 Punkte)

Schätzen Sie ab, inwiefern das Gewicht eines Menschen von 60 kg, der sich auf der Erdoberfläche befindet, typischerweise variiert durch (i) den Einfluss des Mondes, (ii) den Einfluss der Sonne, (iii) Luftdruckschwankungen.

Aufgabe 5. Die Hilfsgrößen $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{ij}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{ijk}}$ (4 Punkte)

Wir verwenden die Einstein'sche Summationskonvention, die beinhaltet, dass implizit über die doppelten Indizes in einem Ausdruck summiert wird.

(a) Berechnen Sie die Ausdrücke δ_{ii}, $\delta_{ij}\,\varepsilon_{ijk}$ und $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}$.

(b) Zeigen Sie: $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$ und $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

(c) Zeigen Sie analytisch (nicht geometrisch) mit Hilfe von (b) für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\hat{\boldsymbol{\alpha}}| = 1$: $\mathbf{x} = (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \times (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{x})$.

Aufgabe 6. Polarkoordinaten (11 Punkte)

Betrachten Sie ein punktförmiges Teilchen in der Ebene, dessen Aufenthaltsort $\mathbf{x}$ mittels Polarkoordinaten dargestellt werden kann:

$$\mathbf{x}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad |\mathbf{x}| \equiv \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = \rho \quad .$$

(a) Geben Sie die radialen und tangentialen Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_\rho \equiv \frac{1}{\rho}\mathbf{x}$ bzw. $\hat{\mathbf{e}}_\varphi \equiv \frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\rho$ explizit als Funktionen des Winkels φ an. Zeigen Sie: $\frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\rho$.

Betrachten Sie die Bahn $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{x}(\rho,\varphi)$ des Teilchens, parametrisiert durch die zeitabhängigen Funktionen $\rho(t)$ und $\varphi(t)$.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens als Linearkombinationen von $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

Betrachten Sie nun speziell ein Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf der *Kardioide* $\rho = k(1 + \cos\varphi)$ bewegt.

(c) Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens.

(d) Berechnen Sie die Beschleunigung, ihr Betrag und die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens mit Hilfe der Ergebnisse aus (b).