Aufgabenblatt 03, Abgabe: 16. 05. 2011

Aufgabe 7. Hintereinanderausführung von Drehungen (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Abbildung, die aus einer Drehung um den Winkel φ um die x_2-Achse und einer anschließenden Drehung um den Winkel φ um die x_3-Achse resultiert.

(a) Geben Sie die resultierende Drehmatrix R an.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Drehachse und den Drehwinkel α.

(c) Geben Sie Drehachse und -Winkel konkret für den Grenzfall kleiner Winkel ($\varphi \to 0$), sowie für die Fälle $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = \pi$ an und skizzieren Sie die Funktion $\alpha(\varphi)$.

Aufgabe 8. Sphärisch symmetrische Massenverteilungen (12 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m mit Koordinaten $\mathbf{x}(t)$, das die Gravitationskraft einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung („Erde“) mit der Massendichte $\rho(|\mathbf{x}'|)$ spürt, lautet:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \rho(|\mathbf{x}'|) \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad .$$

Wir definieren noch: $\mathbf{x} \equiv x\hat{\mathbf{e}}$ mit $x > 0$ und $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}, \hat{\mathbf{e}})\hat{\mathbf{e}}$ gilt. Warum kann man bei der Berechnung von $(\mathbf{g}, \hat{\mathbf{e}})$ o. B. d. A. $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_3$ annehmen?

(b) Zeigen Sie, indem Sie wie üblich Kugelkoordinaten einführen und auf die neue Variable $\xi \equiv \cos(\vartheta)$ übergehen:

$$g(x) \equiv (\mathbf{g}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{e}}) = 2\pi\mathcal{G} \int_0^{R_\mathrm{E}} dr\, r^2 \rho(r) \int_{-1}^{1} d\xi \frac{r\xi - x}{(r^2 + x^2 - 2rx\xi)^{3/2}} \quad ,$$

wobei R_E den Erdradius bezeichnet.

(c) Zeigen Sie für den Fall, dass das Teilchen sich außerhalb der Erdoberfläche aufhält (also für $x > R_\mathrm{E}$): $g(x) = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{E}}{x^2}$.

(d) Zeigen Sie für den Fall, dass das Teilchen sich im Erdinneren befindet: $g(x) = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{E}(x)}{x^2}$ mit $M_\mathrm{E}(x) = 4\pi \int_0^x dr\, r^2 \rho(r)$. Interpretieren Sie dieses Resultat.

Wir bohren nun einen Tunnel vom Nord- zum Südpol quer durch die Erde und lassen das Teilchen der Masse m mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ genau über dem Eingang des Tunnels beim Nordpol los. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Massendichte der Erde konstant (d. h. r-unabhängig) ist: $\rho(r) = \rho$ und Reibungseffekte vernachlässigt werden können.

(e) Stellen Sie die entsprechende Bewegungsgleichung des Teilchens auf und lösen Sie diese. Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens in Worten. Kehrt das Teilchen jemals zum Nordpol zurück? Wenn ja: Bestimmen Sie die approximative Rückkehrzeit (in Sekunden).