Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Einführung in die Theoretische Physik“ (SS 2011)
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 04, Abgabe: 23. 05. 2011

Aufgabe 9. Fall aus großer Höhe (10 Punkte)

Aus der Aufg. 8 ist bekannt, dass die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Schwerkraftfeld der Erde $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\mathcal{G}M_\mathrm{E}\,\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ lautet. Hierbei wird angenommen, dass die Massenverteilung der Erde (Masse M_E) sphärisch symmetrisch um $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist und dass der Einfluss anderer Himmelskörper und die Luftreibung vernachlässigt werden können. Das Teilchen wird zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ im Punkte $\mathbf{x}(0)$ mit $|\mathbf{x}(0)| > R_\mathrm{E}$ losgelassen, wobei R_E wie üblich den Erdradius bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichung die radiale Geschwindigkeit, mit der das Teilchen auf die Erde aufprallt, und berechnen Sie deren numerischen Wert explizit für den Fall $r = \frac{1}{4}$ mit $r \equiv \frac{R_\mathrm{E}}{|\mathbf{x}(0)|}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeit, die bis zum Aufprall vergeht, durch

$$T = \sqrt{\frac{R_\mathrm{E}}{2g}}\,f(r)\,, \qquad f(r) \equiv r^{-3/2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{r}\right) + \sqrt{r(1-r)}\right]$$

gegeben ist. Skizzieren Sie $f(r)$ für $0 < r \leq 1$. Wie verhält sich die Funktion $f(r)$ bei $r \to 0$ und bei $r \to 1$? Berechnen Sie den numerischen Wert der Zeit T explizit für den Fall $r = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 10. Gegeneinander bewegte Bezugssysteme (10 Punkte)

Ein Bademeister steht im Abstand a vom (geradlinigen) Ufer eines Fluss-Schwimmbades. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers ist v_F. Plötzlich bemerkt er, dass ein Kind im Abstand b vom Ufer und eine Strecke y_0 flussabwärts von einer Luftmatratze fällt und abgetrieben wird. Auf welchem Weg erreicht er das Kind am schnellsten, wenn er mit der Geschwindigkeit v_1 rennen und mit der Geschwindigkeit v_2 schwimmen kann? Wie lange braucht er?

(a) Wie sieht der schnellste Weg unter der Bedingung aus, dass der Bademeister eine Strecke s flussabwärts in das Wasser steigt? Geben Sie die vom Bademeister benötigte Zeit $T(s)$ an.

(b) Geben Sie die allgemeine Bestimmungsgleichung für die optimale Wahl von s im generischen Fall ($a > 0$, $b > 0$) an. Ist die Lösung eindeutig?

(c) Vereinfachen und lösen Sie die Bestimmungsgleichung aus b) für den Fall, dass der Bademeister schon am Ufer steht ($a = 0$). Sind für die Bestimmung des schnellsten Weges Fallunterscheidungen nötig?

(d) Vereinfachen Sie die Bestimmungsgleichungen für den Grenzfall verschwindender Fließgeschwindigkeit $v_F = 0$. Geben Sie die Lösung für $y_0 \ll a$, $y_0 \ll b$ an und bestimmen Sie für diesen Fall auch das Verhältnis $\tan(\varphi_1)/\tan(\varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 die Winkel der Bahn zur Normalen des Ufers auf Land- bzw. Wasserseite sind.