Aufgabenblatt 06, Abgabe: 06. 06. 2011

Aufgabe 14. Transformationen unter Drehungen (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige Drehungen $R(\boldsymbol{\alpha})$ gilt (Einsteinsche Summenkonvention):

$$\varepsilon_{ijk} R_{il} R_{jm} R_{kn} = \varepsilon_{lmn}, \quad \delta_{ij} R_{il} R_{jm} = \delta_{lm}$$

wobei R_{il} das (il)-Element der Drehmatrix $R(\boldsymbol{\alpha})$ darstellt.

(b) Beweisen Sie, vorzugsweise mit Hilfe der Größe ε_{ijk}, die Rechenregel

$$\left[R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{a}\right] \times \left[R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{b}\right] = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad ,$$

die für beliebige Drehungen $R(\boldsymbol{\alpha})$ und beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 15. Kreisbahnen und kleine Schwingungen (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei Punktteilchen mit den Massen m_1 und m_2 und den Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, deren Zweiteilchenwechselwirkung aus einem Potential der Form $V(x) = V_0 \ln(x/x_0)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|, \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{21}$ und $x_0 > 0$ abgeleitet werden kann. Wir untersuchen dieses Problem im Schwerpunktsystem.

(a) Betrachten Sie zunächst mögliche Kreisbahnen für den Relativvektor $\mathbf{x}(t)$ der beiden Teilchen: Bestimmen Sie den Gesamtdrehimpuls $|\mathbf{L}^{(\mathrm{S})}|$ sowie die Kreisfrequenz ω_{K}, mit der die Kreisbahn durchlaufen wird, beide als Funktion des Radius $|\mathbf{x}(t)|$ der Kreisbahn.

(b) Betrachten Sie nun mögliche kleine Schwingungen um die Kreisbewegung: Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_{S}, mit der solche kleinen Schwingungen ausgeführt werden können, und entscheiden Sie, ob die Bahn einer kleinen Schwingung um die Kreisbahn (im Rahmen der harmonischen Näherung) geschlossen ist.

Aufgabe 16. Der Sturz ins Zentrum (9 Punkte)

Wir betrachten das Zweiteilchenproblem $\mu\ddot{\mathbf{x}} = -V'(x)\hat{\mathbf{x}}$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$ für den Relativvektor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{21}(t)$ zweier miteinander wechselwirkender Teilchen und nehmen an, dass das Potential $V(x)$ die Form

$$V(x) = V_0\, x^{\alpha} \qquad (V_0 < 0\,,\ \alpha < -2)$$

hat. Die Kraft, die die Teilchen aufeinander ausüben, ist somit stark *attraktiv*. Des Weiteren nehmen wir an, dass der (erhaltene) Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem durch $\mathbf{L}^{(\mathrm{S})} = L\hat{\mathbf{e}}_3$ mit $L > 0$ gegeben ist und dass zur Anfangszeit $t = 0$ gilt: $\dot{x}(0) < 0$ und $x(0) < x_{\mathrm{m}}$ mit

$$x_{\mathrm{m}} \equiv \left(\frac{\alpha\mu V_0}{L^2}\right)^{\frac{1}{|2+\alpha|}} \quad .$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Teilchen innerhalb einer *endlichen* Zeit $T > 0$ in den Massenschwerpunkt stürzen. Geben Sie einen *exakten* Ausdruck für T in der Form eines Integrals an. (Sie brauchen dieses Integral nicht explizit zu berechnen.) Erläutern Sie insbesondere, an welcher Stelle Sie die Einschränkung $x(0) < x_{\mathrm{m}}$ verwendet haben.

(b) Entscheiden Sie, ob die beiden Teilchen *endlich viele* oder *unendlich viele* Umläufe um den Massenschwerpunkt ausführen, bevor sie in ihn hineinstürzen. Erläutern Sie Ihre Antwort.

(c) Wie ist der Sturz in den Massenschwerpunkt mit der Drehimpulserhaltung vereinbar?