Aufgabenblatt 07, Abgabe: **Di**, 14. 06. 2011

Aufgabe 17. Kosmische Geschwindigkeiten (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die minimale Geschwindigkeit („Fluchtgeschwindigkeit“ oder „zweite kosmische Geschwindigkeit“), die ein Teilchen benötigt, um (unter Vernachlässigung der Einflüsse aller anderen Himmelskörper) aus dem Schwerkraftfeld der Erde zu entkommen. Beantworten Sie dieselbe Frage für die Schwerkraftfelder der Sonne bzw. der Milchstraße (im letzten Fall genügt eine vernünftige Schätzung).

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit („erste kosmische Geschwindigkeit“) eines Teilchens, das sich entlang einer Kreisbahn nahe der Erdoberfläche um die Erde bewegt. Bestimmen Sie analog die erste kosmische Geschwindigkeit für eine Kreisbahn um die Sonne (entlang deren Oberfläche). Wie verhalten sich die ersten und zweiten kosmischen Geschwindigkeiten zueinander?

Aufgabe 18. Elliptische Kepler-Bahnen (16 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für Kepler-Bahnen allgemein

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{\mu}\left[E^{(\mathrm{S})} - V_{\mathrm{f}}(x)\right] \quad , \quad V_{\mathrm{f}}(x) = -\frac{\mathcal{G}\mu M}{x} + \frac{L^2}{2\mu x^2}$$
$$p = \frac{L^2}{\mu^2 \mathcal{G} M} \quad , \quad E^{(\mathrm{S})} = -\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathcal{G}\mu M}{L}\right)^2 (1-\varepsilon^2) \quad , \quad x(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

und für elliptische Kepler-Bahnen zusätzlich noch $p = a_1(1-\varepsilon^2) = a_2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ gilt. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf solche elliptischen Bahnen.

(a) Zeigen Sie für die Halbachsen a_1 und a_2:

$$a_1 = \frac{\mathcal{G}\mu M}{2|E^{(\mathrm{S})}|} \quad , \quad a_2 = \frac{L}{\sqrt{2\mu|E^{(\mathrm{S})}|}} \quad .$$

(b) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{\mu x^2}{2|E^{(\mathrm{S})}|[(a_1\varepsilon)^2 - (x-a_1)^2]} \quad . \tag{1}$$

(c) Substituieren Sie die Parametrisierung $x(\xi) = a_1[1-\varepsilon\cos(\xi)]$ in (1). Wählen Sie die Anfangsbedingung so, dass $\xi = 0$ zur Zeit $t = 0$ gilt. Zeigen Sie nun:

$$t(\xi) = \frac{(a_1)^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M}}\left[\xi - \varepsilon\sin(\xi)\right] \quad .$$

(d) Skizzieren Sie die durch ξ parametrisierte Kurve $\left(a_1^{-3/2}\sqrt{\mathcal{G}M}\,t(\xi)\,,\, a_1^{-1}x(\xi)\right)$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und im Grenzfall $\varepsilon \uparrow 1$.

(e) Zeigen Sie: $x_1 = a_1[\cos(\xi) - \varepsilon]$ und $x_2 = a_1\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\xi)$ mit $\binom{x_1}{x_2} \equiv x(\varphi)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$.