Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Einführung in die Theoretische Physik“ (SS 2011)
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 08, Abgabe: 20. 06. 2011

Aufgabe 19. Die Winkelabhängigkeit der Zeit im Kepler-Problem (14 Punkte)

Die Winkelabhängigkeit $t(\varphi)$ der Zeitvariablen im Kepler-Problem ist bekanntlich sowohl für Ellipsen ($0 \le \varepsilon < 1$) als auch für Parabeln ($\varepsilon = 1$) und Hyperbeln ($\varepsilon > 1$) gegeben durch:

$$t(\varphi) = \frac{\mu p^2}{L}\tau(\varphi) \quad , \quad \tau(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\varphi' \, \frac{1}{[1+\varepsilon\cos(\varphi')]^2} \quad .$$

(a) Zeigen Sie für alle $\varepsilon \ge 0$:

$$\tau(\varphi) = -\tau(-\varphi) \quad ; \quad \tau(\varphi) \sim \frac{\varphi}{(1+\varepsilon)^2}\left[1 + \frac{\varepsilon\varphi^2}{3(1+\varepsilon)} + \dots\right] \quad (\varphi \to 0) \quad .$$

(b) Zeigen Sie für $\varepsilon \ge 1$ durch Analyse des Integrals $\tau(\varphi)$ nahe $\varphi_\infty \equiv \pi - \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$:

$$\tau(\varphi) \sim \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varphi_\infty - \varphi)^{-1} & (\varphi \uparrow \varphi_\infty,\ \varepsilon > 1) \\ \frac{4}{3}(\pi - \varphi)^{-3} & (\varphi \uparrow \varphi_\infty = \pi,\ \varepsilon = 1) \end{cases} \quad .$$

(c) Zeigen Sie für elliptische Bahnen ($0 \le \varepsilon < 1$) durch direkte Differentiation:

$$\tau(\varphi) = \frac{-1}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{\varepsilon\sin(\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\varphi)} - \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left[\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\tan\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}{1+\varepsilon}\right]\right\}.$$

(d) Zeigen Sie für $\varepsilon = 1$ außerdem unter Verwendung von $\cos(\varphi) = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) - 1$ durch explizite Berechnung:

$$\tau(\varphi) = \tfrac{1}{2}\tan\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)\left[1 + \tfrac{1}{3}\tan^2(\tfrac{1}{2}\varphi)\right] \quad .$$

Aufgabe 20. Geschlossene und nicht-geschlossene Bahnen (6 Punkte)

Nehmen wir an, zwei Punktteilchen der Massen m_1 bzw. m_2 üben eine anziehende Kraft aufeinander aus, die das dritte Newton'sche Gesetz erfüllt und aus dem Zweiteilchenpotential $V(x) = -\frac{A}{x} - \frac{B}{2x^2}$ (mit $A > 0$ und $B > 0$) hergeleitet werden kann. Betrachten Sie nun das effektive Einteilchenproblem für den Relativvektor $\mathbf{x}(t)$ der beiden Punktmassen im Schwerpunktsystem.

(a) Zeigen Sie, dass für $L^2/\mu > B$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren, die das Attraktionszentrum $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit dem Perizentrum bzw. dem Apozentrum der Bahn verbinden, durch

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\mu B}{L^2}}} \, ,$$

gegeben ist, wobei μ die reduzierte Masse und L den Betrag des Gesamtdrehimpulses darstellt.

(b) Ist die Bahn im Allgemeinen geschlossen? Falls nein: Ist sie jemals geschlossen?