Aufgabenblatt 09, Abgabe: 27. 06. 2011

Aufgabe 21. Korrekturen zur Kepler'schen Bewegungsgleichung (5 Punkte)

Einschließlich der Korrekturen aufgrund der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Kepler-Bahn durch die folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d^2(x^{-1})}{d\varphi^2} = -(x^{-1} - p^{-1}) + \frac{3\mathcal{G}M}{c^2}x^{-2}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese im Formalismus der nichtrelativistischen Newton'schen Mechanik aus einem Potential $V(x) = -\frac{\mathcal{G}\mu M}{x}[1+f(x)]$ hergeleitet werden kann, wobei $f(x) = \left(\frac{L}{\mu c x}\right)^2 = \left(\frac{x\dot{\varphi}}{c}\right)^2$ gilt. Wie erreicht man aus dieser Formel den nichtrelativistischen Limes?

Aufgabe 22. Beispiel eines exakt lösbaren Dreiteilchenproblems (10 Punkte)

Das allgemeine Problem der Dynamik dreier Punktteilchen mit den Massen m_1, m_2 und m_3, die einander mittels ihrer Gravitationskräfte gegenseitig anziehen, ist nicht allgemein lösbar. Ein exakt lösbarer Spezialfall ist jedoch die Bewegung dreier gleicher Massen ($m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$), die zu jedem Zeitpunkt ein *gleichseitiges Dreieck* in einer (in irgendeinem Inertialsystem *festen*) Ebene bilden. Zu jeder Zeit t sind die (i. A. zeitabhängigen) Abstände der drei Teilchen zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt also gleich; wir bezeichnen diese drei gleichen Abstände als $x(t)$.

(a) Stellt die Annahme, dass die Bewegung in einer festen Ebene stattfindet, eine zusätzliche Einschränkung dar?

O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Bewegung in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-$\hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene stattfindet und dass die Koordinaten von Teilchen 1 im Schwerpunktsystem durch $\mathbf{x}(t) = x(t)(\cos[\varphi(t)], \sin[\varphi(t)], 0)$ gegeben sind. Wir bestimmen nun die Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass Teilchen 2 und 3 sich in $\mathbf{x}_+$ und $\mathbf{x}_-$ befinden mit:

$$\mathbf{x}_\pm \equiv \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{x}_\perp - \tfrac{1}{2}\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}_\perp \equiv x\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

(c) Zeigen Sie für die Bewegungsgleichung von Teilchen 1:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathcal{G}m(\mathbf{x}_+ - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}|^3} + \frac{\mathcal{G}m(\mathbf{x}_- - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_- - \mathbf{x}|^3} \overset{!}{=} -\frac{\mathcal{G}m\mathbf{x}}{\sqrt{3}\,x^3} \quad .$$

(d) Erklären Sie die Beziehung zwischen dem hier betrachteten exakt lösbaren 3-Teilchen-Problem und dem Kepler-Problem und geben Sie die (3-Teilchen)-Lösungen an.

(e) Ist die Dynamik stabil (im Vergleich zum 2-Teilchen-System)?

Fragestunde am Freitag, dem 1.07.2011:

Bitte senden Sie Fragen zur Vorlesung bis zum Mittwoch, dem 29.06.2011, 14^{00} Uhr an Frau Dr. E. Gorelik (gorelike@uni-mainz.de).