Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Einführung in die Theoretische Physik“ (SS 2011)
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 10, Abgabe: 04. 07. 2011

Aufgabe 23. Kreisbahnen der anderen Art (8 Punkte)

Wir betrachten die Relativbewegung eines Zweiteilchenproblems, für die bekanntlich (in der üblichen Polardarstellung) $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu x^2}$ und $\dot{x}^2 = \frac{2}{\mu}\left[E^{(\mathrm{S})} - V_{\mathrm{f}}(x)\right]$ gilt. Das im effektiven Potential $V_{\mathrm{f}}(x)$ enthaltene Zweiteilchenpotential $V(x)$ ist hierbei zunächst beliebig. Man kann sich fragen, ob es neben den in der Vorlesung behandelten Kreisbahnen, bei denen sich das Anziehungszentrum $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ im *Mittelpunkt* des Kreises befindet, auch mögliche kreisförmige Bahnen gibt, wobei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ auf dem Kreisrand liegt. Zeigen Sie, dass diese Kreisbahnen der anderen Art nur für Zweiteilchenpotentiale der Form $V(x) = -V_0 x^{-4}$ mit $V_0 > 0$ auftreten, und bestimmen Sie den entsprechenden Wert der Gesamtenergie $E^{(\mathrm{S})}$ und den Radius der Kreisbahn als Funktion von V_0 und eventuell anderen Parametern im Problem.
Hinweis: Suchen Sie zunächst eine Parametrisierung der Bahn in der Form $x_1(t) = R[1 + \cos(\alpha)]$, $x_2(t) = R\sin(\alpha)$. Berechnen Sie $(\frac{dx}{d\varphi})^2$ dann auf zwei verschiedene Weisen.

Aufgabe 24. Anharmonische Oszillatoren (8 Punkte)

Die Schwingungsdauer eines harmonischen Oszillators (mit der Bewegungsgleichung $\ddot{z} = -\omega^2 z$) hängt bekanntlich nicht von der maximalen Auslenkung (oder alternativ: von der Energie E) des Oszillators ab. Betrachten Sie nun allgemein die Schwingungsdauer T der Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential $V(z)$. Beweisen Sie:

(a) $T \propto E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$ für $V(z) = V_0\,|z|^n$ mit $V_0 > 0,\ n > 0,\quad E > 0$

(b) $T = \sqrt{2m}\frac{\pi}{a}\,|E|^{-\frac{1}{2}}$ für $V(z) = -V_0 \cosh^{-2}(az)$ mit $V_0 > 0,\ a > 0,\quad -V_0 < E < 0\,.$

Aufgabe 25. Die Lorentz-Kraft (4 Punkte)

Betrachten Sie einen nicht-relativistischen geladenen Massenpunkt (Masse m, Ladung q) in einem zeitunabhängigen elektromagnetischen Feld $\mathbf{E} = \varepsilon x_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_1$. Lösen Sie die Lorentz'sche Bewegungsgleichung für $q\epsilon/m < 0$ und beliebige Anfangsbedingungen.