Aufgabenblatt 11, Abgabe: 11. 07. 2011

Aufgabe 26. Kleine Schwingungen: Das zweiatomige Molekül (8 Punkte)
Betrachten Sie ein einfaches zweiatomiges Molekül, das nur Schwingungen in Richtung der Molekülachse ausführen kann. Bei der Untersuchung von möglichen kleinen Schwingungen haben wir also mit einem effektiv *ein*dimensionalen Problem zu tun. Die Koordinaten der beiden Atome entlang der Molekülachse seien x_1 und x_2, die entsprechenden Massen m_1 und m_2. Die Ruhelänge des Moleküls sei a, die Federkonstante k. Das Zweiteilchenpotential ist somit durch $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2$ gegeben.

(a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an und überprüfen Sie, dass die Koordinaten $x_{10} = 0$, $x_{20} = a$ einem möglichen Gleichgewichtszustand entsprechen. Gehen Sie auf neue Koordinaten $y_1 = \sqrt{m_1}\, x_1$, $y_2 = \sqrt{m_2}\,(x_2 - a)$ über und zeigen Sie, dass die transformierte Bewegungsgleichung für $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ die Form $\ddot{\mathbf{y}} = -B \cdot \mathbf{y}$ hat.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix B. Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenschwingungen des Moleküls (inklusive ihrer Zeitabhängigkeit) und skizzieren Sie sie.

Aufgabe 27. Elektromagnetische Potentiale und Galilei-Transformationen (8 Punkte)
Das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unter Galilei-Transformationen ist bereits aus der Vorlesung bekannt:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\right] \tag{1}$$
$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\, \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad , \tag{2}$$

wobei die Koordinatensysteme gemäß $\mathbf{x}'(\mathbf{x}, t) = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\, \mathbf{x} - \mathbf{v}t - \boldsymbol{\xi} = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\, (\mathbf{x} - \mathbf{v}_\alpha t - \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ und $t'(\mathbf{x}, t) = t - \tau$ miteinander verknüpft sind. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das Transformationsverhalten

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{3}$$
$$\Phi'(\mathbf{x}', t') = \Phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

der elektromagnetischen Potentiale mit (1) und (2) verträglich ist.

(a) Zeigen Sie, dass (3) das Transformationsverhalten (2) impliziert.

(b) Zeigen Sie, dass (3) und (4) zusammen das Transformationsverhalten (1) implizieren.

(c) Implizieren (1) und (2) umgekehrt auch (3) und (4)?

(d) Ist das *Vektor*potential $\mathbf{A}$ ein echter oder ein Pseudovektor? Ist das *skalare* Potential Φ wirklich ein Skalar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 28. Lorentz-Invarianz der Wellengleichung (4 Punkte)
Zeigen Sie explizit, dass die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

invariant unter Lorentz-Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

aber nicht invariant unter Galilei-Transformationen ist.