



Aufgabe 1. Integrationen (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie (mit expliziter Herleitung) die Stammfunktionen von:

1. $x^n \ln(x)$ 2. $\frac{1}{x \ln(x)}$ 3. $\frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$ 4. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 5. $\frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)}$

(b) Bestimmen Sie die von der Ellipse $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ eingeschlossene Fläche.

Aufgabe 2. Welche Scheibe ist am leckersten? (3 Punkte)

Ein kugelförmiges Brötchen wird in 7 gleich dicke Scheiben geteilt. Ein Krustenliebhaber wünscht sich die Scheibe mit der (absolut) meisten Kruste. Soll er eines der beiden Enden nehmen oder doch lieber die mittlere Scheibe, oder ist dies egal?

Aufgabe 3. Dreidimensionale Integrale (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen von

(i) $\{\mathbf{x} \mid 0 \leq x_3 \leq \sqrt{16 - \rho^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 4 \cos(\varphi)\}$ (Zylinderkoordinaten)

(ii) $\{\mathbf{x} \mid r \leq 3^{2/3}, \quad 1 \leq \tan(\vartheta) \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ (Kugelkoordinaten)

und beschreiben Sie die Form dieser Integrationsbereiche in Worten oder machen Sie eine Skizze.

Aufgabe 4. Funktionen mehrerer Veränderlicher (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion zweier Variabler $f(x_1, x_2) = x_1(x_2)^2 / [(x_1)^2 + (x_2)^4]$ und berechnen Sie:

(i) $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0)$ (ii) $\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(0, x_2)$ (iii) $\lim_{y \rightarrow 0} f(\lambda y^2, y)$

mit $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, ob $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})$ existiert.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen im Punkte $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

(i) $\sin [(x_1)^2 + (x_2)^2]$ (ii) $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ (iii) $\arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$.