Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Einführung in die Theoretische Physik" (SS 2012)
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 04, Abgabe: 14. 05. 2012

Aufgabe 10. Kleine Drehungen (7 Punkte)

Aus der Aufg. 8 ist es bekannt, dass die Hintereinanderausführung von Drehungen einer Drehung darstellt.

(a) Geben Sie Drehachse und -Winkel (d.h. die Ergebnisse der Aufg. 8b) konkret für den Grenzfall kleiner Winkel ($\varphi \to 0$) sowie für die Fälle $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = \pi$ an.

(b) Entwickeln Sie die Funktion $\alpha(\varphi)$ für $\varphi \to 0$ bis zu 3. Ordnung in φ.

(c) Skizzieren Sie die Funktion $\alpha(\varphi)$ und vergleichen Sie sie mit Ergebnissen aus (a) und (b).

Aufgabe 11. Fall aus großer Höhe (13 Punkte)

Aus der Aufg. 9 ist bekannt, dass die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Schwerkraftfeld der Erde $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\mathcal{G} M_\mathrm{E}\, \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ lautet. Hierbei wird angenommen, dass die Massenverteilung der Erde (Masse M_E) sphärisch symmetrisch um $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist und dass der Einfluss anderer Himmelskörper und die Luftreibung vernachlässigt werden können. Das Teilchen wird zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ im Punkte $\mathbf{x}(0)$ mit $|\mathbf{x}(0)| > R_\mathrm{E}$ losgelassen, wobei R_E wie üblich den Erdradius bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichung die radiale Geschwindigkeit, mit der das Teilchen auf die Erde aufprallt, und berechnen Sie deren numerischen Wert explizit für den Fall $r = \frac{1}{4}$ mit $r \equiv \frac{R_\mathrm{E}}{|\mathbf{x}(0)|}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeit, die bis zum Aufprall vergeht, durch

$$T = \sqrt{\frac{R_\mathrm{E}}{2g}}\, f(r)\,, \qquad f(r) \equiv r^{-3/2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{r}\right) + \sqrt{r(1-r)}\right]$$

gegeben ist. Skizzieren Sie $f(r)$ für $0 < r \leq 1$. Wie verhält sich die Funktion $f(r)$ bei $r \to 0$ und bei $r \to 1$? Berechnen Sie den numerischen Wert der Zeit T explizit für den Fall $r = \frac{1}{4}$.