Aufgabenblatt 06, Abgabe: **Di.** 29. 05. 2012

Aufgabe 15. Gegeneinander bewegte Bezugssysteme (13 Punkte)

Ein Bademeister steht im Abstand a vom (geradlinigen) Ufer eines Fluss-Schwimmbades. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers ist v_F. Plötzlich bemerkt er, dass ein Kind im Abstand b vom Ufer und eine Strecke y_0 flussabwärts von einer Luftmatratze fällt und abgetrieben wird. Auf welchem Weg erreicht er das Kind am schnellsten, wenn er mit der Geschwindigkeit v_1 rennen und mit der Geschwindigkeit v_2 schwimmen kann? Wie lange braucht er?

(a) Wie sieht der schnellste Weg unter der Bedingung aus, dass der Bademeister eine Strecke s flussabwärts in das Wasser steigt? Geben Sie die vom Bademeister benötigte Zeit $T(s)$ an.

(b) Geben Sie die allgemeine Bestimmungsgleichung für die optimale Wahl von s im generischen Fall ($a > 0$, $b > 0$) an. Ist die Lösung eindeutig?

(c) Vereinfachen und lösen Sie die Bestimmungsgleichung aus b) für den Fall, dass der Bademeister schon am Ufer steht ($a = 0$). Sind für die Bestimmung des schnellsten Weges Fallunterscheidungen nötig?

(d) Vereinfachen Sie die Bestimmungsgleichungen für den Grenzfall verschwindender Fließgeschwindigkeit $v_F = 0$. Geben Sie die Lösung für $y_0 \ll a$, $y_0 \ll b$ an und bestimmen Sie für diesen Fall auch das Verhältnis $\tan(\varphi_1)/\tan(\varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 die Winkel der Bahn zur Normalen des Ufers auf Land- bzw. Wasserseite sind.

Aufgabe 16. Transformationen unter Drehungen (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige Drehungen $R(\boldsymbol{\alpha})$ gilt (Einsteinsche Summenkonvention):

$$\varepsilon_{ijk} R_{il} R_{jm} R_{kn} = \varepsilon_{lmn}, \quad \delta_{ij} R_{il} R_{jm} = \delta_{lm}$$

wobei R_{il} das (il)-Element der Drehmatrix $R(\boldsymbol{\alpha})$ darstellt.

(b) Beweisen Sie, vorzugsweise mit Hilfe der Größe ε_{ijk}, die Rechenregel

$$\left[R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{a}\right] \times \left[R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{b}\right] = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad ,$$

die für beliebige Drehungen $R(\boldsymbol{\alpha})$ und beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt.