



**Aufgabe 17. Der Sturz ins Zentrum** (10 Punkte)

Wir betrachten das Zweiteilchenproblem  $\mu\ddot{\mathbf{x}} = -V'(x)\hat{\mathbf{x}}$  mit  $x \equiv |\mathbf{x}|$  für den Relativvektor  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{21}(t)$  zweier miteinander wechselwirkender Teilchen und nehmen an, dass das Potential  $V(x)$  die Form

$$V(x) = V_0 x^\alpha \quad (V_0 < 0, \alpha < -2)$$

hat. Die Kraft, die die Teilchen aufeinander ausüben, ist somit stark *attraktiv*. Des Weiteren nehmen wir an, dass der (erhaltene) Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem durch  $\mathbf{L}^{(S)} = L\hat{\mathbf{e}}_3$  mit  $L > 0$  gegeben ist und dass zur Anfangszeit  $t = 0$  gilt:  $\dot{x}(0) < 0$  und  $x(0) < x_m$  mit

$$x_m \equiv \left( \frac{\alpha\mu V_0}{L^2} \right)^{\frac{1}{|\alpha+2|}}.$$

- Zeigen Sie, dass die beiden Teilchen innerhalb einer *endlichen* Zeit  $T > 0$  in den Massenschwerpunkt stürzen. Geben Sie einen *exakten* Ausdruck für  $T$  in der Form eines Integrals an. (Sie brauchen dieses Integral nicht explizit zu berechnen.) Erläutern Sie insbesondere, an welcher Stelle Sie die Einschränkung  $x(0) < x_m$  verwendet haben.
- Entscheiden Sie, ob die beiden Teilchen *endlich viele* oder *unendlich viele* Umläufe um den Massenschwerpunkt ausführen, bevor sie in ihn hineinstürzen. Erläutern Sie Ihre Antwort.
- Wie ist der Sturz in den Massenschwerpunkt mit der Drehimpulserhaltung vereinbar?