Aufgabenblatt 09, Abgabe: 18. 06. 2012

Aufgabe 20. Kosmische Geschwindigkeiten (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die minimale Geschwindigkeit („Fluchtgeschwindigkeit“ oder „zweite kosmische Geschwindigkeit“), die ein Teilchen benötigt, um (unter Vernachlässigung der Einflüsse aller anderen Himmelskörper) aus dem Schwerkraftfeld der Erde zu entkommen. Beantworten Sie dieselbe Frage für die Schwerkraftfelder der Sonne bzw. der Milchstraße (im letzten Fall genügt eine vernünftige Schätzung).

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit („erste kosmische Geschwindigkeit“) eines Teilchens, das sich entlang einer Kreisbahn nahe der Erdoberfläche um die Erde bewegt. Bestimmen Sie analog die erste kosmische Geschwindigkeit für eine Kreisbahn um die Sonne (entlang deren Oberfläche). Wie verhalten sich die ersten und zweiten kosmischen Geschwindigkeiten zueinander?

Aufgabe 21. Dynamik der Lösungen des Kepler-Problems (16 Punkte)

Die Winkelabhängigkeit $t(\varphi)$ der Zeitvariablen im Kepler-Problem ist bekanntlich sowohl für Ellipsen ($0 \leq \varepsilon < 1$) als auch für Parabeln ($\varepsilon = 1$) und Hyperbeln ($\varepsilon > 1$) gegeben durch:

$$t(\varphi) = \frac{\mu p^2}{L}\tau(\varphi) \quad , \quad \tau(\varphi) = \int_0^\varphi d\varphi' \, \frac{1}{[1+\varepsilon\cos(\varphi')]^2} \quad .$$

(a) Zeigen Sie für alle $\varepsilon \geq 0$:

$$\tau(\varphi) = -\tau(-\varphi) \quad ; \quad \tau(\varphi) \sim \frac{\varphi}{(1+\varepsilon)^2}\left[1 + \frac{\varepsilon\varphi^2}{3(1+\varepsilon)} + \ldots\right] \quad (\varphi \to 0) \quad .$$

(b) Zeigen Sie für $\varepsilon \geq 1$ durch Analyse des Integrals $\tau(\varphi)$ nahe $\varphi_\infty \equiv \pi - \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$:

$$\tau(\varphi) \sim \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2-1}(\varphi_\infty - \varphi)^{-1} & (\varphi \uparrow \varphi_\infty,\ \varepsilon > 1) \\ \frac{4}{3}(\pi - \varphi)^{-3} & (\varphi \uparrow \varphi_\infty = \pi,\ \varepsilon = 1) \end{cases} \quad .$$

(c) Zeigen Sie für elliptische Bahnen ($0 \leq \varepsilon < 1$) durch direkte Differentiation:

$$\tau(\varphi) = \frac{-1}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{\varepsilon\sin(\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\varphi)} - \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left[\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\tan\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}{1+\varepsilon}\right]\right\}.$$

(d) Zeigen Sie für $\varepsilon = 1$ außerdem unter Verwendung von $\cos(\varphi) = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) - 1$ durch explizite Berechnung:

$$\tau(\varphi) = \tfrac{1}{2}\tan\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)\left[1 + \tfrac{1}{3}\tan^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)\right] \quad .$$