Übungsaufgaben zur Vorlesung
„Einführung in die Theoretische Physik“ (SS 2012)
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 10, Abgabe: 25. 06. 2012

Aufgabe 22. Geschlossene und nicht-geschlossene Bahnen (7 Punkte)

Nehmen wir an, zwei Punktteilchen der Massen m_1 bzw. m_2 üben eine anziehende Kraft aufeinander aus, die das dritte Newton'sche Gesetz erfüllt und aus dem Zweiteilchenpotential $V(x) = -\frac{A}{x} - \frac{B}{2x^2}$ (mit $A > 0$ und $B > 0$) hergeleitet werden kann. Betrachten Sie nun das effektive Einteilchenproblem für den Relativvektor $\mathbf{x}(t)$ der beiden Punktmassen im Schwerpunktsystem.

(a) Zeigen Sie, dass für $L^2/\mu > B$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren, die das Attraktionszentrum $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit dem Perizentrum bzw. dem Apozentrum der Bahn verbinden, durch

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\mu B}{L^2}}} \, ,$$

gegeben ist, wobei μ die reduzierte Masse und L den Betrag des Gesamtdrehimpulses darstellt.

(b) Ist die Bahn im Allgemeinen geschlossen? Falls nein: Ist sie jemals geschlossen?

Aufgabe 23. Beispiel eines exakt lösbaren Dreiteilchenproblems (13 Punkte)

Das allgemeine Problem der Dynamik dreier Punktteilchen mit den Massen m_1, m_2 und m_3, die einander mittels ihrer Gravitationskräfte gegenseitig anziehen, ist nicht allgemein lösbar. Ein exakt lösbarer Spezialfall ist jedoch die Bewegung dreier gleicher Massen ($m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$), die zu jedem Zeitpunkt ein *gleichseitiges Dreieck* in einer (in irgendeinem Inertialsystem *festen*) Ebene bilden. Zu jeder Zeit t sind die (i. A. zeitabhängigen) Abstände der drei Teilchen zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt also gleich; wir bezeichnen diese drei gleichen Abstände als $x(t)$.

(a) Stellt die Annahme, dass die Bewegung in einer festen Ebene stattfindet, eine zusätzliche Einschränkung dar?

O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Bewegung in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-$\hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene stattfindet und dass die Koordinaten von Teilchen 1 im Schwerpunktsystem durch $\mathbf{x}(t) = x(t)(\cos[\varphi(t)], \sin[\varphi(t)], 0)$ gegeben sind. Wir bestimmen nun die Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass Teilchen 2 und 3 sich in $\mathbf{x}_+$ und $\mathbf{x}_-$ befinden mit:

$$\mathbf{x}_\pm \equiv \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{x}_\perp - \tfrac{1}{2}\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}_\perp \equiv x \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

(c) Zeigen Sie für die Bewegungsgleichung von Teilchen 1:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathcal{G}m(\mathbf{x}_+ - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}|^3} + \frac{\mathcal{G}m(\mathbf{x}_- - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_- - \mathbf{x}|^3} \stackrel{!}{=} -\frac{\mathcal{G}m\mathbf{x}}{\sqrt{3}\,x^3} \quad .$$

(d) Erklären Sie die Beziehung zwischen dem hier betrachteten exakt lösbaren 3-Teilchen-Problem und dem Kepler-Problem und geben Sie die (3-Teilchen)-Lösungen an.

(e) Ist die Dynamik stabil (im Vergleich zum 2-Teilchen-System)?