Aufgabenblatt 11, Abgabe: 02. 07. 2012

Aufgabe 24. Korrekturen zur Kepler'schen Bewegungsgleichung (5 Punkte)

Einschließlich der Korrekturen aufgrund der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Kepler-Bahn durch die folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d^2(x^{-1})}{d\varphi^2} = -(x^{-1} - p^{-1}) + \frac{3\mathcal{G}M}{c^2}x^{-2}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese im Formalismus der nichtrelativistischen Newton'schen Mechanik aus einem Potential $V(x) = -\frac{\mathcal{G}\mu M}{x}[1+f(x)]$ hergeleitet werden kann, wobei $f(x) = \left(\frac{L}{\mu c x}\right)^2 = \left(\frac{x\dot{\varphi}}{c}\right)^2$ gilt. Wie erreicht man aus dieser Formel den nichtrelativistischen Limes?

Aufgabe 25. Kreisbahnen der anderen Art (10 Punkte)

Wir betrachten die Relativbewegung eines Zweiteilchenproblems, für die bekanntlich (in der üblichen Polardarstellung) $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu x^2}$ und $\dot{x}^2 = \frac{2}{\mu}\left[E^{(S)} - V_f(x)\right]$ gilt. Das im effektiven Potential $V_f(x)$ enthaltene Zweiteilchenpotential $V(x)$ ist hierbei zunächst beliebig. Man kann sich fragen, ob es neben den in der Vorlesung behandelten Kreisbahnen, bei denen sich das Anziehungszentrum $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ im *Mittelpunkt* des Kreises befindet, auch mögliche kreisförmige Bahnen gibt, wobei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ auf dem Kreisrand liegt. Zeigen Sie, dass diese Kreisbahnen der anderen Art nur für Zweiteilchenpotentiale der Form $V(x) = -V_0 x^{-4}$ mit $V_0 > 0$ auftreten, und bestimmen Sie den entsprechenden Wert der Gesamtenergie $E^{(S)}$ und den Radius der Kreisbahn als Funktion von V_0 und eventuell anderen Parametern im Problem.
Hinweis: Suchen Sie zunächst eine Parametrisierung der Bahn in der Form $x_1(t) = R[1 + \cos(\alpha)]$, $x_2(t) = R\sin(\alpha)$. Berechnen Sie $(\frac{dx}{d\varphi})^2$ dann auf zwei verschiedene Weisen.

Aufgabe 26. Die Lorentz-Kraft (5 Punkte)

Betrachten Sie einen nicht-relativistischen geladenen Massenpunkt (Masse m, Ladung q) in einem zeitunabhängigen elektromagnetischen Feld $\mathbf{E} = \varepsilon x_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_1$. Lösen Sie die Lorentz'sche Bewegungsgleichung für $q\epsilon/m < 0$ und beliebige Anfangsbedingungen.

Fragestunde am Freitag, dem 29.06.2012:
Bitte senden Sie Fragen zur Vorlesung bis zum Donnerstag, dem 28.06.2012, 12^{00} Uhr an Frau Dr. E. Gorelik (gorelike@uni-mainz.de) und Herrn Prof. N. Blümer (nbluemer@uni-mainz.de).