Aufgabenblatt 12, Abgabe: 09. 07. 2012

Aufgabe 27. Kleine Schwingungen: Das lineare dreiatomige Molekül (13 Punkte)

Betrachten Sie ein lineares dreiatomiges Molekül, das nur Schwingungen in Richtung der Molekülachse ausführen kann. Bei der Untersuchung von möglichen kleinen Schwingungen haben wir also mit einem effektiv *ein*dimensionalen Problem zu tun. Die Koordinaten der drei Atome entlang der Molekülachse seien x_1, x_2 und x_3, die entsprechenden Massen m_1, m_2 und wiederum m_1. Als Anwendung könnte man z. B. an CO_2 denken. Die Ruhelängen der beiden Bindungen seien a, die Federkonstanten k. Das Dreiteilchenpotential ist somit durch

$$V(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{2}k[(x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2]$$

gegeben.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ auf. Überprüfen Sie, dass die Koordinatenwahl $x_{10} = -a$, $x_{20} = 0$ und $x_{30} = a$ einem möglichen Gleichgewichtszustand entspricht.

(b) Führen Sie neue Koordinaten $y_1 \equiv \sqrt{m_1}\,(x_1 + a)$, $y_2 \equiv \sqrt{m_2}\,x_2$ und $y_3 \equiv \sqrt{m_1}\,(x_3 - a)$ ein und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ die Form $\ddot{\mathbf{y}} = -B \cdot \mathbf{y}$ hat.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix B. Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenschwingungen des Moleküls (inklusive ihrer Zeitabhängigkeit) und skizzieren Sie sie.

Aufgabe 28. Elektromagnetische Potentiale und Galilei-Transformationen (7 Punkte)

Das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unter Galilei-Transformationen lautet, wie aus der Vorlesung bekannt, für $c \to \infty$:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \tag{1}$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad , \tag{2}$$

wobei die Koordinatensysteme gemäß $\mathbf{x}'(\mathbf{x}, t) = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \boldsymbol{\xi} = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,(\mathbf{x} - \mathbf{v}_\alpha t - \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ und $t'(\mathbf{x}, t) = t - \tau$ miteinander verknüpft sind. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das Transformationsverhalten

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{3}$$

$$\Phi'(\mathbf{x}', t') = \Phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

der elektromagnetischen Potentiale mit (1) und (2) verträglich ist.

(a) Zeigen Sie, dass (3) das Transformationsverhalten (2) impliziert.

(b) Zeigen Sie, dass (3) und (4) zusammen das Transformationsverhalten (1) implizieren.

(c) Implizieren (1) und (2) umgekehrt auch (3) und (4)?

(d) Ist das *Vektor*potential $\mathbf{A}$ ein echter oder ein Pseudovektor? Ist das *skalare* Potential Φ wirklich ein Skalar? Begründen Sie Ihre Antwort.