



Aufgabe 29. Anharmonische Oszillatoren (8 Punkte)

Die Schwingungsdauer eines harmonischen Oszillators (mit der Bewegungsgleichung $\ddot{z} = -\omega^2 z$) hängt bekanntlich nicht von der maximalen Auslenkung (oder alternativ: von der Energie E) des Oszillators ab. Betrachten Sie nun allgemein die Schwingungsdauer T der Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential $V(z)$. Beweisen Sie:

- (a) $T \propto E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$ für $V(z) = V_0 |z|^n$ mit $V_0 > 0, n > 0, E > 0$
- (b) $T = \sqrt{2m} \frac{\pi}{a} |E|^{-\frac{1}{2}}$ für $V(z) = -V_0 \cosh^{-2}(az)$ mit $V_0 > 0, a > 0, -V_0 < E < 0$.

Aufgabe 30. Lorentz-Invarianz der Wellengleichung (5 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

invariant unter Lorentz-Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

aber nicht invariant unter Galilei-Transformationen ist.

Aufgabe 31. Lorentz-Transformationen und die Addition von Geschwindigkeiten (7 Punkte)

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme K und K' , wobei K' die Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zu K hat. Wir wählen die x_1 - und x'_1 -Achsen von K und K' parallel zur Geschwindigkeit: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{v}}$. Die Koordinaten in K und K' sind in diesem Fall durch eine Lorentz-Transformation der Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp},$$

miteinander verknüpft, wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ und $\beta \equiv \frac{v}{c}$ gilt.

- (a) Verwenden Sie die Parametrisierung $\beta = \tanh(\phi)$ mit $\phi \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformation („Boost“) auch als

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix} \equiv \Lambda_B(\phi)$$

geschrieben werden kann.

Betrachten Sie nun *drei* Inertialsysteme K, K', K'' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K'', K') = v_2 \hat{\mathbf{e}}_1$. Für zunächst unbekanntes v_{1+2} gilt also auch $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K'', K) = v_{1+2} \hat{\mathbf{e}}_1$.

- (b) Zeigen Sie: $\Lambda_B(\phi_1) \Lambda_B(\phi_2) = \Lambda_B(\phi_1 + \phi_2)$; leiten Sie hieraus das Additionsgesetz für parallel ausgerichtete Geschwindigkeiten $v_{1+2} = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2)$ ab.

Hinweis: Verwenden Sie bei Bedarf:

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh(\phi_1) + \tanh(\phi_2)}{1 + \tanh(\phi_1) \tanh(\phi_2)}.$$