Aufgabenblatt 2, Abgabe: 26. 04. 2010

Aufgabe 4. Elektromagnetische Potentiale und Galilei-Transformationen (7 Punkte)

Das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unter Galilei-Transformationen ist bereits aus der Theorie-I-Vorlesung bekannt (s. Abschnitt 5.5 des Skriptes):

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}',t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\left[\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\right] \tag{1}$$
$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}',t') = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \quad , \tag{2}$$

wobei die beiden Koordinatensysteme gemäß

$$\mathbf{x}'(\mathbf{x},t) = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \boldsymbol{\xi} = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\left(\mathbf{x} - \mathbf{v}_\alpha t - \boldsymbol{\xi}_\alpha\right)$$

und $t'(\mathbf{x},t) = t - \tau$ miteinander verknüpft sind. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das Transformationsverhalten

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}',t') = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\,\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{3}$$
$$\Phi'(\mathbf{x}',t') = \Phi(\mathbf{x},t) - \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{4}$$

der elektromagnetischen Potentiale mit (1) und (2) verträglich ist.

(a) Zeigen Sie, dass (3) das Transformationsverhalten (2) impliziert.

(b) Zeigen Sie, dass (3) und (4) zusammen das Transformationsverhalten (1) implizieren.

(c) Implizieren (1) und (2) umgekehrt auch (3) und (4)?

(d) Ist das *Vektor*potential $\mathbf{A}$ ein echter oder ein Pseudovektor? Ist das *skalare* Potential Φ wirklich ein Skalar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte (5 Punkte)

Wir betrachten ein einzelnes geladenes Teilchen der Masse m und Ladung q. Die Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_{\text{Lor}} = q(\mathbf{E}+\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B})$ kann bekanntlich aus einem geschwindigkeitsabhängigen Potential hergeleitet werden: $\mathbf{F}_{\text{Lor}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_{\text{Lor}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial V_{\text{Lor}}}{\partial \mathbf{x}}$ mit $V_{\text{Lor}}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t) \equiv q[\Phi(\mathbf{x},t) - \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\cdot\dot{\mathbf{x}}]$.

(a) Zeigen Sie umgekehrt, dass, falls eine physikalische Kraft in der Form $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ mit $V = V(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$ darstellbar ist und das deterministische Prinzip erfüllt, das entsprechende Potential notwendigerweise die Form $V(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t) = \widetilde{\Phi}(\mathbf{x},t) - \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x},t)\cdot\dot{\mathbf{x}}$ haben muss.

(b) Zeigen Sie, dass die Reibungskraft $\mathbf{F}_{\text{R}} = -k\dot{\mathbf{x}}$ mit $k > 0$ nicht in der Form $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ mit $V = V(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$ darstellbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion für Reibungskräfte der Form $\mathbf{F}_{\text{R}} = -kv\mathbf{v}$ mit $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ und $v \equiv |\mathbf{v}|$. Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion allgemeiner für Reibungskräfte der Form $\mathbf{F}_{\text{R}} = -f(v)\mathbf{v}$ mit $vf(v) \to 0$ für $v \to 0$.

Aufgabe 6. Die Brachystochrone (8 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Die Brachystochrone (gr. *brachistos* kürzeste, *chronos* Zeit) ist die schnellste Verbindung zweier Punkte durch eine Bahn, auf der ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Gravitationskraft reibungsfrei hinabgleitet. Das Problem der Brachystochrone lässt sich auf die Dynamik eines eindimensionalen Teilchens mit der Wirkung und der Lagrange-Funktion

$$S[x] = \int_0^T dt\; L(x(t), \dot{x}(t)) \quad , \quad L(x, \dot{x}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{-2gx}}$$

zurückführen. Hierbei sind Start- und Endpunkt der Bahn $x(t)$ durch $x(0) = x_1 \leq 0$ und $x(T) = x_2 \leq 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ des Teilchens nach einigen Umformungen auf die Form

$$\tfrac{d}{dt}\left[x(1 + \dot{x}^2)\right] = 0 \quad \text{bzw.} \quad x(1 + \dot{x}^2) = -\tfrac{1}{2}l$$

gebracht werden kann, wobei $-\frac{1}{2}l$ eine Integrationskonstante ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung der in (a) hergeleiteten Differentialgleichung mit Hilfe einer Winkelvariablen ξ parametrisiert werden kann:

$$t - t_0 = \tfrac{1}{4}l[\xi - \sin(\xi)] \quad , \quad x = -\tfrac{1}{4}l[1 - \cos(\xi)]$$

und somit die Form einer *Zykloide* hat.

(c) Berechnen Sie den Wert des Wirkungsfunktionals S für die in (b) bestimmte „physikalische Bahn“ als Funktion der Parameter (l, g, ξ_1, ξ_2).

(d) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten für die Randbedingungen (i) $x_1 = x_2 = 0$ und (ii) $x_1 = 0,\ x_2 = -2T/\pi$. Skizzieren Sie die entsprechenden „physikalischen Bahnen“ $x(t)$ für $0 \leq t \leq T$.