Aufgabenblatt 3, Abgabe: 03. 05. 2010

Aufgabe 7. Die Energie als Erhaltungsgröße (3 Punkte)

Wir wissen bereits, dass die Größe $\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L$ die Energie der physikalischen Bahn eines Teilchens darstellt, falls die Lagrange-Funktion die Form $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})$ hat. In dieser Aufgabe betrachten wir allgemein eine Lagrange-Funktion $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, die zwar nach wie vor nicht explizit von der Zeitvariablen abhängt, aber nicht unbedingt die einfache Form $L = T(\dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})$ haben muss.

(a) Zeigen Sie, dass für eine solche Lagrange-Funktion die „Energie“ $\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L$ der physikalischen Bahn immer eine Erhaltungsgröße ist.

(b) Zeigen Sie analog, dass die „Energie“ $\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} - L$ der physikalischen Bahn eines N-Teilchen-Systems eine Erhaltungsgröße ist, falls die Lagrange-Funktion $L(\{\mathbf{x}_i\}, \{\dot{\mathbf{x}}_i\})$ nicht explizit von der Zeitvariablen abhängt.

Aufgabe 8. Modifiziertes Hamilton-Prinzip (6 Punkte)

Betrachten Sie ein modifiziertes Hamilton'sches Prinzip, das besagt, dass die physikalische Bahn eines Teilchens das Wirkungsfunktional

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t)$$

extremal macht. Bei der Variation der Bahn sind nun die Ortskoordinaten $\mathbf{x}(t_1)$ und $\mathbf{x}(t_2)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}(t_1)$ und $\dot{\mathbf{x}}(t_2)$ im Start- und im Endpunkt festzuhalten. Beachten Sie, dass die verallgemeinerte Lagrange-Funktion L nun auch von der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$ abhängen darf.

(a) Wie lautet die (verallgemeinerte) Lagrange-Gleichung für die physikalische Bahn in diesem Fall?

(b) Warum wäre ein solches modifiziertes Hamilton-Prinzip im Allgemeinen unverträglich mit dem deterministischen Prinzip der Klassischen Mechanik?

Aufgabe 9. Minimierung der Rotationsfläche (7 Punkte)

Wir betrachten einen Körper, der rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse im dreidimensionalen (x, y, z)-Raum ist. Die Schnittmenge der Oberfläche dieses Körpers mit der Halbebene $\{y = 0,\ x > 0\}$ werde durch die Kurve $x(z)$ beschrieben. Gesucht ist diejenige Kurve $x(z)$, die die Mantelfläche des Körpers im Bereich $z_1 \leq z \leq z_2$ bei festen Randwerten (x_1, z_1) und (x_2, z_2) minimiert.

(a) Warum kann man o. B. d. A. annehmen, dass jedem z-Wert ein eindeutiger x-Wert zugeordnet ist und dass $x(z)$ streng monoton ansteigt?

(b) Im Folgenden betrachten wir aus rechentechnischen Gründen die Umkehrfunktion $x(z)$. Zeigen Sie, dass die Mantelfläche, die sich zwischen $z_1 = z(x_1)$ und $z_2 = z(x_2) > z_1$ befindet, durch

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx\, x\sqrt{1 + [z'(x)]^2}$$

gegeben ist.

Wir wechseln nun die Notation: $(\mathcal{F}, x, x_1, x_2, z, z_1, z_2) \to (S, t, t_1, t_2, x, x_1, x_2)$.

(c) Zeigen Sie, dass das Minimierungsproblem für $\mathcal{F}$ nach dem Notationswechsel als Hamilton'sches Prinzip für die Dynamik eines eindimensionalen Teilchens interpretiert werden kann:

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\dot{x}(t), t) \quad , \quad L(\dot{x}, t) = 2\pi t \sqrt{1 + \dot{x}^2}$$

und lösen Sie die entsprechende Lagrange-Gleichung.

Aufgabe 10. Invarianzen der Lagrange-Gleichung (4 Punkte)

(a) Wir betrachten abgeschlossene mechanische Systeme. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion L unter Galilei-Transformationen wie

$$L' = L + \frac{d}{dt}\lambda(\mathbf{X}, t)$$

transformiert wird, und geben Sie $\lambda(\mathbf{X}, t)$ an.

(b) Bei einer Eichtransformation werden die elektromagnetischen Potentiale $(\mathbf{A}, \Phi)$ wie folgt transformiert:

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A} - \frac{1}{c}\nabla\Lambda \ , \ \tilde{\Phi} \equiv \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \ ,$$

wobei die orts- und zeitabhängige Funtion $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ beliebig ist. Zeigen Sie, dass sich die Lagrange-Funktion eines N-Teilchen-Systems unter einer solchen Eichtransformation wiederum nur um eine vollständige Zeitableitung ändert, und geben Sie $\lambda(\mathbf{X}, t)$ an.

(c) Was folgt jeweils für die Lagrange-Gleichung?