Aufgabenblatt 4, Abgabe: 10. 05. 2010

Aufgabe 11. Rheonome Zwangsbedingungen (5 Punkte)

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel, das sich in der x_1-x_3–Ebene bewegt und aus einem starren masselosen Stab der Länge l besteht, der an einem Ende im bewegten Punkt $\mathbf{a}(t)$ aufgehängt ist und an dessen anderem Ende, das die Koordinaten $\mathbf{x}$ hat, ein Massenpunkt m befestigt ist. Die Beschleunigung der Schwerkraft sei $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$. Wir definieren den Winkel φ durch $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_3) \equiv l\cos(\varphi)$ und $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \equiv l\sin(\varphi)$. Bestimmen Sie die kinetische Energie $T(\varphi, \dot{\varphi}, t)$, die potentielle Energie $V(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ und somit auch die Lagrange-Funktion $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) \equiv T - V$ des Massenpunktes, falls der Aufhängepunkt in folgender Weise bewegt wird:

(a) $\mathbf{a}(t) = a[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_3]$

(b) $\mathbf{a}(t) = a\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1$

(c) $\mathbf{a}(t) = a\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_3$

Geben Sie jeweils an, welche Terme in der Lagrange-Funktion weggelassen werden können, da sie vollständige Zeitableitungen darstellen.

Aufgabe 12. Das sphärische Pendel (8 Punkte)

Wir betrachten zunächst eine allgemeine Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = \{q_k\}$, der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_k\}$ und der Zeit t.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung invariant ist unter der Addition einer Konstanten zur Lagrange-Funktion.

Betrachten Sie nun speziell das sphärische Pendel der Länge l ($\vartheta = 0$ in Gleichgewichtslage). Hier gilt:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{x}(\vartheta, \varphi) = (l\sin\vartheta\cos\varphi, l\sin\vartheta\sin\varphi, -l\cos\vartheta)$$

(b) Werten Sie den allgemeinen Ausdruck

$$T(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left|\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right|^2$$

aus und zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des sphärischen Pendels in sphärischen Koordinaten durch

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \tfrac{1}{2}ml^2\left[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\right] + mgl\cos(\vartheta)$$

gegeben ist. Geben Sie die resultierenden Lagrange-Gleichungen an.

(c) Bestimmen Sie die möglichen Lösungen mit $\vartheta = \vartheta_0 =$ konstant. Beschreiben Sie in Worten, welche Art von Pendelbewegung diese Lösungen darstellen.

(d) Zeigen Sie, dass man die unter (c) bestimmten Lösungen mit $\vartheta = \vartheta_0$ *nicht* erhält, falls man den (konstanten?!) Term $mgl\cos(\vartheta)$ in der Lagrange-Funktion weglässt. Erklären Sie, ob dies Ihren Schlussfolgerungen in (a) widerspricht; begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13. Das Doppelpendel (7 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Wir betrachten zwei Massenpunkte, die sich im Schwerkraftfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ in der x_1-x_3–Ebene bewegen können. Der erste Massenpunkt [mit der Masse m_1 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_1(t)$] ist mittels eines starren masselosen Stabs der Länge l_1 mit dem Ursprung verbunden. Der zweite Massenpunkt [mit der Masse m_2 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_2(t)$] ist mittels eines starren masselosen Stabs der Länge l_2 mit dem ersten Massenpunkt verbunden. Abgesehen von den Zwangsbedingungen $|\mathbf{x}_1| = l_1$ und $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = l_2$ sind die Massenpunkte frei beweglich. Wir bezeichnen die Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x}_1$ bzw. $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ und der $(-\hat{\mathbf{e}}_3)$-Richtung als φ_1 und φ_2:

$$\mathbf{x}_1 = l_1 \left[\sin(\varphi_1)\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos(\varphi_1)\,\hat{\mathbf{e}}_3\right] \quad , \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_2 \left[\sin(\varphi_2)\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos(\varphi_2)\,\hat{\mathbf{e}}_3\right]$$

und betrachten zunächst allgemeine (d. h. nicht notwendigerweise kleine) Auslenkungen des Doppelpendels.

(a) Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(\varphi_1, \varphi_2)$ des Doppelpendels.

(b) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie in der Form

$$T(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2} a_{kl}(\varphi_1, \varphi_2)\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_l$$

darstellbar ist, und bestimmen Sie den „Massentensor“ a_{kl} explizit.

Wir untersuchen nun den Fall *kleiner Schwingungen* und vernachlässigen alle Beiträge zu T und V, die von höherer als quadratischer Ordnung in den Variablen $(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$ sind.

(c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = T - V$ in dieser Näherung und geben Sie die entsprechenden Lagrange-Gleichungen an.

(d) **Bonusteil:** Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die Normalschwingungen des Doppelpendels; skizzieren Sie die Normalschwingungen. *Hinweis:* Normalschwingungen $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$ sind durch eine wohldefinierte (Eigen-)frequenz ω charakterisiert und können in der Form $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0 \cos[\omega(t - t_0)]$ mit zeitunabhängigem $\boldsymbol{\varphi}_0 \neq \mathbf{0}$ dargestellt werden (für mehr Details: s. § 3.5 des Theorie-I-Skripts).