Aufgabenblatt 6, Abgabe: 31. 05. 2010

Aufgabe 17. Lagrange-Gleichungen erster Art (2 Punkte)

Betrachten Sie die Wirkung der Form

$$\bar{S}^{(\mathbf{q}_2,t_2)}_{(\mathbf{q}_1,t_1)}[\mathbf{q},\boldsymbol{\lambda}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t) + \sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t) f_m(\mathbf{q}(t),t)\right]$$

als Funktional von $\mathbf{q}$ und $\boldsymbol{\lambda} \equiv \{\lambda_m\}$. Zeigen Sie explizit, dass sowohl die Lagrange-Gleichungen der ersten Art als auch die entsprechende Zwangsbedingungen aus dem Variationprinzip

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\delta\bar{S})^{(\mathbf{q}_2,t_2)}_{(\mathbf{q}_1,t_1)}[\mathbf{q},\boldsymbol{\lambda}] = 0$$

hergeleitet werden können, wobei die Variation $(\delta\mathbf{q})(t)$ den üblichen Einschränkungen $(\delta\mathbf{q})(t_1) = (\delta\mathbf{q})(t_2) = \mathbf{0}$ unterworfen ist und die Variation $(\delta\boldsymbol{\lambda})(t)$ zu den Anfangs- und Endzeiten t_1 bzw. t_2 keinerlei Einschränkungen unterworfen ist.

Aufgabe 18. Hantelmolekül im elektrischen Feld (7 Punkte)

Betrachten Sie ein Hantelmolekül, bestehend aus zwei geladenen Massenpunkten, die durch einen starren masselosen Stab der Länge l verbunden sind. Der erste Massenpunkt hat die Masse m_1, die Ladung $\hat{q}_1$ und die Koordinaten $\mathbf{x}_1$; die entsprechenden Größen für den zweiten Massenpunkt sind m_2, $\hat{q}_2$ und $\mathbf{x}_2$. Das Hantelmolekül befindet sich in einem konstanten (d. h. orts- und zeitunabhängigen) elektrischen Feld $\mathbf{E}$.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die relevante holonome Zwangsbedingung als Funktionen der kartesischen Koordinaten und Geschwindigkeiten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2)$ und der Zeit an.

Wählen Sie nun den Massenschwerpunkt $\mathbf{X}(t) \equiv \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1+m_2}$ und den Relativvektor $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ als verallgemeinerte Koordinaten.

(b) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Zwangsbedingung als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten an und leiten Sie die entsprechenden Lagrange-Gleichungen der *ersten* Art her.

(c) Lösen Sie die Lagrange-Gleichungen der ersten Art für $\mathbf{X}(t)$ und bestimmen Sie die vom Stab ausgeübte Zwangskraft als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten für die physikalische Bahn.

(d) Welche Änderungen ergäben sich in (a), (b) und (c), falls das elektrische Feld explizit zeitabhängig (aber immer noch ortsunabhängig) wäre?

Aufgabe 19. Elimination zyklischer Koordinaten (4 Punkte)

Betrachten Sie ein geladenes Teilchen in elektromagnetischen Feld, wobei die Potentiale nicht von x_3 abhängen: $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, x_2)$.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion vor und nach der Elimination der zyklischen Koordinate an.

(b) Wie lauten die Lagrange-Gleichungen (nach der Elimination)?

Aufgabe 20. Lineare Terme in der kinetischen Energie (7 Punkte)

Die kinetische Energie $\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2$ erhält bei einer Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten, $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{q}}, t)$ mit $\bar{\mathbf{q}} \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_{f+1}) \in \mathbb{R}^{f+1}$, bekanntlich eine Form, die *quadratisch* (jedoch nicht unbedingt *homogen* quadratisch) als Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten ist:

$$T(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = \tfrac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f+1} a_{kl}(\bar{\mathbf{q}}, t)\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{f+1} a_k(\bar{\mathbf{q}}, t)\dot{q}_k + a_0(\bar{\mathbf{q}}, t) \quad . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie für eine Transformation $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{q}})$, die nicht explizit von der Zeitvariablen abhängt, dass die kinetische Energie allgemein die Form

$$T(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \tfrac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f+1} a_{kl}(\bar{\mathbf{q}})\dot{q}_k\dot{q}_l \tag{2}$$

mit zeitunabhängigem Massentensor a_{kl} hat.

Wir zeigen nun, ausgehend von (2), dass die Elimination zyklischer Variablen durchaus auch lineare Terme in der kinetischen Energie erzeugen kann, wie in (1), nun allerdings mit zeit*un*abhängigen Koeffizienten $a_k(\bar{\mathbf{q}})$. Hierzu nehmen wir an, dass die Variable q_{f+1} zyklisch ist, und wir definieren $\bar{\mathbf{q}} \equiv (\mathbf{q}, q_{f+1})$ mit $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$. Wir nehmen an, dass die Lagrange-Funktion im $\bar{\mathbf{q}}$-Raum die Form $L^{(f+1)} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{q}_{f+1}) - V(\mathbf{q})$ hat, wobei T homogen quadratisch als Funktion der $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ ist, wie in (2).

(b) Eliminieren Sie die zyklische Variable q_{f+1} aus $L^{(f+1)}$ und zeigen Sie, dass $L^{(f)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ die Form

$$L^{(f)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f} a_{kl}^{(f)}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{f} a_k^{(f)}(\mathbf{q})\dot{q}_k - V^{(f)}(\mathbf{q}) \tag{3}$$

hat. Geben Sie hierbei die genauen Beziehungen zwischen $a_{kl}^{(f)}$, $a_k^{(f)}$ und $V^{(f)}$ und den Größen V und a_{kl} an. Zeigen Sie insbesondere, dass $a_k^{(f)} = 0$ gilt, falls die „kinetischen Kopplungen" $a_{k,f+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, f)$ zwischen $\dot{q}_{f+1}$ und $\{\dot{q}_k \,|\, 1 \leq k \leq f\}$ Null sind.

Als Beispiel betrachten wir die folgende Lagrange-Funktion mit $f = 2$:

$$L^{(2+1)}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \equiv \tfrac{1}{2}a[\dot{\psi}^2 \sin^2(\vartheta) + \dot{\vartheta}^2] + \tfrac{1}{2}b[\dot{\psi}\cos(\vartheta) + \dot{\varphi}]^2 \quad (a, b > 0),$$

die physikalisch die Dynamik eines Gyroskops beschreibt; die Winkelvariablen $(\vartheta, \psi, \varphi)$ werden als „Euler-Winkel" bezeichnet.

(c) Eliminieren Sie die zyklische Variable ψ aus $L^{(2+1)}$. Enthält die Lagrange-Funktion $L^{(2)}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ Terme, die linear von den Geschwindigkeiten $(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ abhängen? Eliminieren Sie alternativ die zyklische Variable φ aus $L^{(2+1)}$. Enthält die Lagrange-Funktion $L^{(2)}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\psi})$ Terme, die linear von den Geschwindigkeiten $(\dot{\vartheta}, \dot{\psi})$ abhängen?

Lineare Terme in einer nicht explizit zeitabhängigen kinetischen Energie werden auch als *gyroskopische Terme* bezeichnet.