Aufgabenblatt 8, Abgabe: 14. 06. 2010

Aufgabe 24. Ein Hantelmolekül schwingt über die Kreuzung (9 Punkte)

Betrachten Sie ein "Hantelmolekül", bestehend aus zwei "Atomen" der Masse m, die durch einen starren masselosen Stab der Länge l miteinander verbunden sind. Eines der beiden Atome hat die Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und kann sich nur (reibungslos) entlang der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse bewegen, das andere hat die Koordinaten $\mathbf{x}_2$ und kann sich nur (reibungslos) entlang der $\hat{\mathbf{e}}_2$-Achse bewegen. Das System wird also in kartesischen Koordinaten durch die Lagrange-Funktion $L(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2) = T(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \dot{\mathbf{x}}_2^2)$ und die drei skleronomen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - l^2\right] = 0 \quad , \quad f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{x}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0 \quad , \quad f_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{x}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0$$

charakterisiert.

(a) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen der ersten Art in kartesischen Koordinaten an und zeigen Sie, dass die vom Stab auf die erste Masse ausgeübte Zwangskraft entlang des Stabs gerichtet ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen der ersten Art, dass die Energie $E = T(\dot{\mathbf{x}}_{\phi 1}, \dot{\mathbf{x}}_{\phi 2})$ des Systems erhalten ist.

Eliminieren Sie nun die zweite und dritte Zwangsbedingung, indem Sie verallgemeinerte Koordinaten (q_1, q_2) einführen, die durch $\mathbf{x}_1 \equiv q_1\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{x}_2 \equiv q_2\hat{\mathbf{e}}_2$ definiert sind.

(c) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen der ersten Art in den verallgemeinerten Koordinaten (q_1, q_2) an und lösen Sie diese.

(d) Zeigen Sie durch explizite Berechnung, dass die in (a) betrachtete, vom Stab auf die *erste* Masse ausgeübte Zwangskraft Arbeit verrichtet und dass die *Gesamt*arbeit, die von den vom Stab ausgeübten Kräften verrichtet wird, Null ist.

(e) Skizzieren Sie die Bewegung des Hantelmoleküls und seines Schwerpunkts als Funktion der Zeit. Erkennen Sie eine zyklische Koordinate? Wie hätte man mit deren Hilfe die Dynamik des Systems einfacher bestimmen können?

Aufgabe 25. Rotierendes Koordinatensystem (11 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}$, die relativ zu einem Inertialsystem gemessen werden. Das Teilchen befindet sich in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(x)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$. Es wird nun eine Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{q}$ durchgeführt, wobei die Variablen $\mathbf{q}$ die Lage des Teilchens in einem Koordinatensystem beschreiben, das relativ zum Inertialsystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die $\hat{\mathbf{e}}_3$-Achse rotiert: $\mathbf{x} = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{q}$ mit $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega}t$ und $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$.

(a) Zeigen Sie: $\dot{\mathbf{x}} = R(\boldsymbol{\alpha})(\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})$. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ des Teilchens in verallgemeinerten Koordinaten und leiten Sie hieraus die folgende Bewegungsgleichung ab:

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \ . \qquad (1)$$

Bestimmen Sie die mit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ assoziierte Hamilton-Funktion und die entsprechenden Hamilton-Gleichungen.

Der zweite Term im rechten Glied von (1) stellt die Coriolis-Kraft dar (Aussprache: Korīōlī, *nicht* Koriṓlis), der dritte Term ist die Zentrifugalkraft.

(b) Erklären Sie, warum Winde auf der nördlichen (bzw. südlichen) Halbkugel nach rechts (bzw. links) abgebogen werden. Betrachten Sie nun ein Teilchen, welches im Schwerkraftfeld der Erde mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ hundert Meter senkrecht über einem Punkt P der Erdoberfläche am Äquator losgelassen wird. In welcher Entfernung/Richtung von P trifft es (näherungsweise im reibungsfreien Fall) auf?

Transformieren Sie nun auf sphärische Koordinaten (q, ϑ, φ) mit $\mathbf{q} \equiv q\hat{\mathbf{e}}_q$ und dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_q = (\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos(\vartheta))$.

(c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(q, \vartheta, \varphi, \dot{q}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ und die entsprechenden verallgemeinerten Impulse. Bestimmen Sie die mit $L(q, \vartheta, \varphi, \dot{q}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ assoziierte Hamilton-Funktion H. Ist H erhalten? Ist H gleich der Energie?