Aufgabenblatt 9, Abgabe: 21. 06. 2010

Aufgabe 26. Energieerhaltung? (6 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Jacobi-Integral und die Hamilton-Funktion erhalten sind und die Energie des Systems darstellen, falls $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ gilt und die eventuellen Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeitvariablen abhängen.
Zur Illustration betrachten wir einen Massenpunkt (Masse m), der reibungslos entlang des Kreisrandes $\{\mathbf{x}|\ |\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}| = l\}$ gleiten kann, wobei $\mathbf{X}(t)$ und l den Mittelpunkt und den Radius des Kreises darstellen. Der Kreis soll sich in der $\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene bewegen, so dass $\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2\hat{\mathbf{e}}_2$ und $\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2$ gilt; die Bewegung $\mathbf{X}(t)$ wird vorgegeben. Man kann die Bewegung des Massenpunkts also mit Hilfe einer einzelnen verallgemeinerten Koordinate φ beschreiben: $\mathbf{x}(\varphi, t) = \mathbf{X}(t) + l[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2]$.

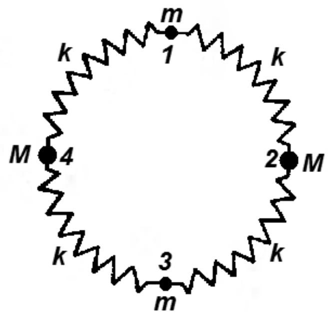
(a) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Energie E des Massenpunkts an.

(b) Wählen Sie nun $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ mit $\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{x}(\varphi, t)$, und leiten Sie aus dieser Lagrange-Funktion Ausdrücke für den verallgemeinerten Impuls und die Hamilton-Funktion ab.

(c) Wie muss man $\mathbf{X}(t)$ wählen, damit die Hamilton-Funktion für alle möglichen physikalischen Bahnen erhalten ist? Ist dann auch die Energie erhalten? Falls nein: Erklären Sie dies. Falls ja: Hätten Sie dies auch aufgrund allgemeiner Überlegungen vorhersehen können?

Aufgabe 27. Der schwingende Kreis (11 Punkte)

Wir betrachten vier Massenpunkte (1. und 3. Massenpunkte der Masse m, 2. und 4. Massenpunkte der Masse M) in der $x_1 - x_2$-Ebene, die sich auf dem sterren Kreis mit dem Radius R reibungslos bewegen können. Die Massen sind entlang den Kreisumfang durch vier ideale Federn mit der Federkonstanten k miteinander verbunden. In der Gleichgewichtslage des Systems sind die Längen aller Federn gleich.



(a) Geben Sie für den Fall kleiner Auslenkungen von der Gleichgewichtslage die Lagrange-Funktion des Systems und die entsprechende Lagrange-Gleichungen an.

(b) Bestimmen Sie aus dem Ansatz $\mathbf{q}^{(\mu)}(t) = \mathbf{q}_0^{(\mu)} \sin(\omega t)$ die Normalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems. Ist die Gleichgewichtslage des Systems stabil?

(c) Skizzieren Sie die Normalschwingungen.

(d) Bestimmen Sie gemäß der Vorlesung die Matrix B' (für die $\ddot{\mathbf{q}}'' = -B'\mathbf{q}''$ gilt) und zeigen Sie, dass $\mathbf{q}_0'' = (1, \sqrt{M/m}, 1, \sqrt{M/m})$ ein Eigenvektor von B' ist. Welchem Eigenvektor des ursprunglichen Problems entspricht $\mathbf{q}_0''$? Geben Sie explizit die Zeitabhängigkeit der entsprechenden Bewegungung des Systems an.

Aufgabe 28. Poisson-Klammern des Drehimpulses (3 Punkte)

Betrachten Sie ein einzelnes Teilchen der Masse m im Phasenraum $\{(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$, wobei $\mathbf{x}$ die kartesischen Koordinaten des Teilchens relativ zu einem Inertialsystem darstellt und $\mathbf{p}$ der entsprechende (kinetische) Impuls ist. Der (kinetische) Drehimpuls ist somit durch $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ definiert. Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, x_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$, $\{L_i, p_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$, $\{L_i, L_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$ und $\{\mathbf{L}^2, L_i\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$. Was fällt Ihnen bei den ersten drei Klammern auf?